高等统计物理 作业四

1. 证明对理想玻色气体，低温时有$\left\langle n_p^2\right\rangle-\left\langle n_p\right\rangle^2 \approx\left\langle n_p\right\rangle$。

2. 推导得出理想玻色气体的内能、熵和定容比热。

3. 具体推导朗道超流理论给出的液 He II 中声子和旋子对应的比热：

$$\frac{C_s}{Nk_{\mathrm{B}}}=\frac{2\pi^2 v\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^3}{15\hbar^3 c^3}$$

$$\frac{C_x}{Nk_{\mathrm{B}}}=\frac{2\sqrt{m_x}\,k_0\varepsilon_0^2 v\exp\left(-\dfrac{\varepsilon_0}{k_{\mathrm{B}}T}\right)}{\left(2\pi\right)^{3/2}\hbar\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^{3/2}}$$

已知这两种准粒子的能谱为$\hbar\omega_k=\begin{cases} c\hbar k & k<<k_0 \\ \varepsilon_0+\dfrac{\hbar^2\left(k^2-k_0^2\right)}{2m_x} & k\approx k_0 \end{cases}$，且系统内能表示为

$$U=U_0+\sum_k \hbar\omega_k\left\langle n_k\right\rangle=U_0+\frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k\,\frac{k^2\hbar\omega_k}{\exp\left(\beta\hbar\omega_k\right)-1}$$ 。

4. 用二次量子化方法证明全同粒子系统的某一物理量算符$\hat{G}$与总粒子数算符$\hat{N}$满足对易关系$\left[\hat{G},\hat{N}\right]=0$。

5. 求自由理想玻色气体在非凝聚相压强随比容和温度的变化关系$P(v,T)$.

6. 由环流的量子化条件，证明超流体在$\mathbf{v}_s$无奇点的单连通区域必须满足朗道条件$\nabla\times\mathbf{v}_s=0$，其中$\mathbf{v}_s$是超流体的速度。

7. 利用真实粒子与准玻色粒子的博戈留波夫变换

$$\begin{cases} \hat{b}_p^+=u_p\hat{a}_p^+-v_p\hat{a}_{-p} \\ \hat{b}_p=u_p\hat{a}_p-v_p\hat{a}_{-p}^+ \end{cases}$$

证明：（a）真实粒子数算符 $\hat{N}_p = \hat{a}_p^+ \hat{a}_p$ 与准粒子数算符 $\hat{n}_p = \hat{b}_p^+ \hat{b}_p$ 的统计平均值之间存在关系 $\left\langle \hat{N}_p \right\rangle = v_p^2 + \left(u_p^2 + v_p^2\right)\left\langle \hat{n}_p \right\rangle$；（b）绝对零度时，动量为零的平均粒子数为 $\left\langle \hat{N}_0 \right\rangle = N\left(1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\left(na^3\right)^{1/2}\right)$，动量不为零的平均粒子数为 $\left\langle \hat{N}_{p\neq 0} \right\rangle = \frac{1+x^2}{2x\sqrt{x^2+2}} - \frac{1}{2}$，其中 $x \equiv p\left(\frac{V}{8\pi a\hbar^2 N}\right)^{1/2}$。

8．证明函数 $S\left(\mathbf{k},\omega\right) = \frac{V}{N}\sum_{\alpha}\delta\left(\omega_\alpha - \omega\right)\left|\left\langle \alpha\right|\hat{\rho}_{\mathbf{k}}\left|0\right\rangle\right|^2$ 具有以下性质：

（a）$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega S\left(\mathbf{k},\omega\right) = \frac{V}{N}\left\langle 0\right|\hat{\rho}_{\mathbf{k}}^+\hat{\rho}_{\mathbf{k}}\left|0\right\rangle$；

（b）$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\omega S\left(\mathbf{k},\omega\right) = \frac{V}{N}\left\langle 0\right|\hat{\rho}_{\mathbf{k}}^+\hat{H}\hat{\rho}_{\mathbf{k}}\left|0\right\rangle = \frac{k^2}{2m}$；

（c）$\lim_{k\to 0}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\frac{1}{\omega}S\left(\mathbf{k},\omega\right) = \lim_{k\to 0}\frac{V}{N}\left\langle 0\right|\hat{\rho}_{\mathbf{k}}^+\hat{H}^{-1}\hat{\rho}_{\mathbf{k}}\left|0\right\rangle = \frac{1}{2mv_s^2}$。

其中 $\mathbf{k}$ 是波矢（令 $\hbar = 1$ 时就是动量），ω 是频率（令 $\hbar = 1$ 时就是能量），V 和 N 分别是系统的体积和粒子数，$\left|\alpha\right\rangle$ 是哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征态，$\left|0\right\rangle$ 是最低本征态，$\hat{\rho}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\int d^3\mathbf{x}\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}\right)\psi^+\left(\mathbf{x}\right)\psi\left(\mathbf{x}\right)$，$\psi\left(\mathbf{x}\right)$ 是二次量子化表象中的场算符，m 是粒子质量，v_s 是绝对零度的声速。

9．证明理想费米气体在绝对零度时的基态能 $\sum_{|p|<p_{\mathrm{F}}}\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{5}N\varepsilon_{\mathrm{F}}$，其中费米能 $\varepsilon_{\mathrm{F}} = \frac{p_{\mathrm{F}}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{gv}\right)^{2/}$，$p_{\mathrm{F}} = \hbar\left(\frac{6\pi^2}{gv}\right)^{1/3}$ 是费米动量，m 是费米子质量，N 是粒子数，$v = \frac{V}{N}$ 是比容，g 是自旋引起的能量简并度。

10. 低温下非理想费米气体的哈密顿量为

$$\hat{H}=\sum_{\mathbf{p},\sigma}\frac{p^2}{2m}\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}+\frac{u_0}{V}\sum_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_2'}\hat{a}_{\mathbf{p}_1'\uparrow}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}_2'\downarrow}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}_2\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}_1\uparrow}$$

其中$u_0=\int u(\mathbf{r})\mathrm{d}^3r$，$u(\mathbf{r})$是费米粒子间相互作用，$\hat{a}^{+}$和$\hat{a}$是产生和湮灭算符，$\mathbf{p}$是动量，$\sigma$是自旋，$m$是粒子质量，$V$是系统体积。另一方面，低能散射的波恩近似给出散射长度$a=\frac{m}{4\pi\hbar^2}\int u(\mathbf{r})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)\mathrm{d}^3r$。用量子微扰论证明：在小动量转移$\mathbf{p}\to 0$的情况下，$u_0=\frac{4\pi a\hbar^2}{m}\left[1-\frac{16\pi a\hbar^2}{V}\sum\frac{\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2')}{p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2}\right]$。

11. 具有排斥势的简并近理想费米气体的基态能量为

$$E_0=\frac{3\hbar^2}{10m}\left(3\pi^2n\right)^{2/3}N+\frac{\pi a\hbar^2}{m}nN\left(1+\frac{6}{35}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{1/3}a\left(11-2\ln 2\right)\right)$$

其中a是散射长度，m是粒子质量，N是总粒子数，$n=\frac{N}{V}$，V是体积。求绝对零度下，气体的化学势和基态压强。

12. 计算说明朗道抗磁性和泡利顺磁性在趋近经典极限时的表现。