量子统计 作业五

1. 求 $J > 0$ 且外磁场 $h \to 0^+$ 的条件下，三角晶格上的二维伊辛模型的最低能量。

2. 证明伊辛模型的总磁化率 $\mathrm{X} \equiv \left.\dfrac{\partial M}{\partial h}\right|_T = \beta\left(\left\langle M^2\right\rangle - \left\langle M\right\rangle^2\right)$，其中 M 是在外磁场 h 作用下的总磁化强度。

3. 证明 $m = \tanh(am)$ 在 $0 < a < 1$ 时没有非零解。

4. 证明对于任意实数，有 $\exp(x) \geq 1 + x$。

5. 用变分原理计算证明伊辛模型的热力学微扰最优解为 $\mu_0 \Delta h = zJ\left\langle s_i\right\rangle_{\mathrm{TP}}$。

6. 忽略梯度项并令外场为零，求金兹伯—朗道模型在临界点处热容的跃变值。

7. 忽略梯度项并令外场为零，求一级相变的金兹伯—朗道模型的相变温度 T_{c} 和过热温度 T_1 相对于过冷温度 T_{c}^0 的值和各温度区间段的极值点。

8. 用级数展开证明对任何满足 $X^2 = 1$ 的矩阵都有 $\exp(\theta X) = \cosh\theta + X\sinh\theta$，其中 θ 是任意实数。

9. 证明二维伊辛模型对应的转移矩阵可以写为 $\mathbf{T} = \left(2\sinh(2\beta J)\right)^{n/2}\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(2)}$，其中各变量的定义见讲义。

10. 证明二维伊辛模型的解为

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln Z_N(\beta) = \ln\left(2\cosh(2\beta J)\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \ln\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}\right)\right)，其中$$

$$\kappa \equiv \frac{\exp(2\beta J) - \exp(-2\beta J)}{\left(\exp(2\beta J) + \exp(-2\beta J)\right)^2}。$$