量子统计 作业三

1．用二次量子化方法证明全同粒子系统的某一物理量算符 $\hat{G}$ 与总粒子数算符 $\hat{N}$ 满足对易关系 $\left[\hat{G},\hat{N}\right]=0$。

2．求自由理想玻色气体在非凝聚相压强随比容和温度的变化关系 $P(v,T)$.

3．由环流的量子化条件，证明超流体在 $\mathbf{v}_s$ 无奇点的单连通区域必须满足朗道条件 $\nabla\times\mathbf{v}_s=0$，其中 $\mathbf{v}_s$ 是超流体的速度。

4．利用真实粒子与准玻色粒子的博戈留波夫变换

$$\begin{cases}\hat{b}_p^{+}=u_p\hat{a}_p^{+}-v_p\hat{a}_{-p}\\ \hat{b}_p=u_p\hat{a}_p-v_p\hat{a}_{-p}^{+}\end{cases}$$

证明：（a）真实粒子数算符 $\hat{N}_p=\hat{a}_p^{+}\hat{a}_p$ 与准粒子数算符 $\hat{n}_p=\hat{b}_p^{+}\hat{b}_p$ 的统计平均值之间存在关系 $\left\langle\hat{N}_p\right\rangle=v_p^2+\left(u_p^2+v_p^2\right)\left\langle\hat{n}_p\right\rangle$；（b）绝对零度时，动量为零的平均粒子数为 $\left\langle\hat{N}_0\right\rangle=N\left(1-\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\left(na^3\right)^{1/2}\right)$，动量不为零的平均粒子数为 $\left\langle\hat{N}_{p\neq0}\right\rangle=\frac{1+x^2}{2x\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{2}$，其中 $x\equiv p\left(\frac{V}{8\pi a\hbar^2N}\right)^{1/2}$。

5．证明函数 $S\left(\mathbf{k},\omega\right)=\frac{V}{N}\sum_{\alpha}\delta\left(\omega_\alpha-\omega\right)\left|\left\langle\alpha\left|\hat{\rho}_{\mathbf{k}}\right|0\right\rangle\right|^2$ 具有以下性质：

（a）$\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega S\left(\mathbf{k},\omega\right)=\frac{V}{N}\left\langle 0\right|\hat{\rho}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{\rho}_{\mathbf{k}}\left|0\right\rangle$；

（b）$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\omega S\left(\mathbf{k},\omega\right)=\frac{V}{N}\langle 0|\hat{\rho}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{H}\hat{\rho}_{\mathbf{k}}|0\rangle=\frac{k^2}{2m}$；

（c）$\lim\limits_{k\to 0}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\frac{1}{\omega}S\left(\mathbf{k},\omega\right)=\lim\limits_{k\to 0}\frac{V}{N}\langle 0|\hat{\rho}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{H}^{-1}\hat{\rho}_{\mathbf{k}}|0\rangle=\frac{1}{2mv_s^2}$。

其中$\mathbf{k}$是波矢（令$\hbar=1$时就是动量），ω是频率（令$\hbar=1$时就是能量），V和N分别是系统的体积和粒子数，$|\alpha\rangle$是哈密顿量$\hat{H}$的本征态，$|0\rangle$是最低本征态，$\hat{\rho}_{\mathbf{k}}=\frac{1}{\sqrt{V}}\int d^3\mathbf{x}\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\psi^{+}\left(\mathbf{x}\right)\psi\left(\mathbf{x}\right)$，$\psi\left(\mathbf{x}\right)$是二次量子化表象中的场算符，$m$是粒子质量，$v_s$是绝对零度的声速。

6. 证明理想费米气体在绝对零度时的基态能$\sum\limits_{|p|<p_{\mathrm{F}}}\frac{p^2}{2m}=\frac{3}{5}N\varepsilon_{\mathrm{F}}$，其中费米能$\varepsilon_{\mathrm{F}}=\frac{p_{\mathrm{F}}^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{gv}\right)^{2/3}$，$p_{\mathrm{F}}=\hbar\left(\frac{6\pi^2}{gv}\right)^{1/3}$是费米动量，$m$是费米子质量，$N$是粒子数，$v=\frac{V}{N}$是比容，$g$是自旋引起的能量简并度。

7. 低温下非理想费米气体的哈密顿量为

$$\hat{H}=\sum_{\mathbf{p},\sigma}\frac{p^2}{2m}\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}+\frac{u_0}{V}\sum_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_2'}\hat{a}_{\mathbf{p}_1'\uparrow}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}_2'\downarrow}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}_2\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}_1\uparrow}$$

其中$u_0=\int u\left(\mathbf{r}\right)\mathrm{d}^3r$，$u\left(\mathbf{r}\right)$是费米粒子间相互作用，$\hat{a}^{+}$和$\hat{a}$是产生和湮灭算符，$\mathbf{p}$是动量，$\sigma$是自旋，$m$是粒子质量，$V$是系统体积。另一方面，低能散射的波恩近似给出散射长度$a=\frac{m}{4\pi\hbar^2}\int u\left(\mathbf{r}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)\mathrm{d}^3r$。用量子微扰论证明：在小动量转移$\mathbf{p}\to 0$的情况下，$u_0=\frac{4\pi a\hbar^2}{m}\left[1-\frac{16\pi a\hbar^2}{V}\sum\frac{\delta\left(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'\right)}{p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2}\right]$。

8. 具有排斥势的简并近理想费米气体的基态能量为

$$E_0=\frac{3\hbar^2}{10m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}N+\frac{\pi a\hbar^2}{m}nN\left(1+\frac{6}{35}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{1/3}a\left(11-2\ln 2\right)\right)$$

其中a是散射长度，m是粒子质量，N是总粒子数，$n=\frac{N}{V}$，V是体积。求绝对零度下，气体的化学势和基态压强。

9. 计算说明朗道抗磁性和泡利顺磁性在趋近经典极限时的表现。