

非平衡统计物理

王延颢

2019 年 11 月 24 日

11. Fokker-Planck 方程

11.1. Fokker-Planck 方程的推导

福克—普朗克方程（Fokker-Planck equation）是一种特殊形式的主方程。Plank 对主方程

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = \int (W(y|y')P(y',t) - W(y'|y)P(y,t))dy' \quad (11.1)$$

作近似得到 Fokker-Planck 方程。把跃迁几率 W 作为跃迁尺度 r 和起始点 y' 的函数：

$$W(y|y') = W(y';r), \quad r = y - y' \quad (11.2)$$

则主方程式(11.1)成为

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = \int W(y-r;r)P(y-r,t)dr - P(y,t) \int W(y;-r)dr \quad (11.3)$$

以下做两个假设。第一个假设认为只有小跳跃发生，即 $W(y';r)$ 是一个关于 r 的尖锐函数，

但是随 y' 变化缓慢，更严格的数学描述为：存在 $\delta > 0$ ，使得

$$\begin{aligned} W(y';r) &\approx 0, & |r| > \delta \\ W(y'+\Delta y;r) &\approx W(y';r), & |\Delta y| < \delta \end{aligned} \quad (11.4)$$

第二个假设是解 $P(y,t)$ 也随 y 缓慢变化。因此可以对式(11.3)进行泰勒展开并保留二阶项：

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(y,t)}{\partial t} &= \int W(y;r)P(y,t)dr - \int r \frac{\partial}{\partial y} (W(y;r)P(y,t))dr \\ &+ \frac{1}{2} \int r^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (W(y;r)P(y,t))dr - P(y,t) \int W(y;-r)dr \end{aligned} \quad (11.5)$$

上式右边的第一和第四项抵消。利用跳跃矩的定义

$$a_v(y) = \int_{-\infty}^{\infty} r^v W(y;r)dr \quad (11.6)$$

可以把式(11.5)写成

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(a_1(y)P) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_2(y)P) \quad (11.7)$$

以上就是从主方程出发利用近似推导得出的 Fokker-Plank 方程。

为了让 Fokker-Plank 方程不仅是一个近似表达式，需要给 W 中的系数增加一个参数 ε ，当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时近似表达式成为严格表达式。以非对称的随机行走为例，相应的主方程为

$$\dot{p}_n = \alpha(p_{n+1} - p_n) + \beta(p_{n-1} - p_n) \quad (11.8)$$

标度 $x \equiv \varepsilon n$ 和 $p_n(t) = \varepsilon P(x, t)$ 。为了补偿标度引起的步长变小，需要增加跃迁几率 α, β 。为了保持迁移几率不变，必须有

$$\beta - \alpha = \frac{A}{\varepsilon} \quad (11.9)$$

其中 A 是与 ε 无关的常数。类似地，为了保持系统没有弥散 (spreading)，必须有

$$\beta + \alpha = \frac{B}{\varepsilon^2} \quad (11.10)$$

则式(11.8)变成

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= \left(\frac{B}{2\varepsilon^2} - \frac{A}{2\varepsilon} \right) \left(\varepsilon \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dots \right) \\ &+ \left(\frac{B}{2\varepsilon^2} + \frac{A}{2\varepsilon} \right) \left(-\varepsilon \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dots \right) \\ &= -A \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2}B \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (11.11)$$

从而在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的意义下得到了 Fokker-Plank 的精确形式。

11.2. Fokker-Plank 方程的性质

以下形式的福克—普朗克方程也叫 Smoluchowski 方程、广义扩散方程或者第二 Kolmogorov 方程：

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} A(y)P + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} B(y)P \quad (11.12)$$

其中 $y \in (-\infty, +\infty)$ 是连续变量， $A(y)$ 和 $B(y)$ 是可微实函数且 $B(y) > 0$ 。该方程还可以改写

成

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(y,t)}{\partial y} \quad (11.13)$$

其中几率流 $J(y,t)$ 的构建方程为

$$J(y,t) = A(y)P - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B(y)P \quad (11.14)$$

式(11.12)的右边第一项称为输运项、对流项或者迁移项，第二项称为扩散项或者涨落项。

令 $P(y,t|y_1,t_1)$, $t \geq t_1$ 为式(11.12)的解，且当 $t=t_1$ 时 $P(y,t|y_1,t_1) = \delta(y-y_1)$ 。用 $P(y,t|y_1,t_1)$ 构建一个马可夫过程，选取其初始分布函数为式(11.12)的稳恒解：

$$P^s(y) = \frac{\text{const.}}{B(y)} \exp\left(2 \int_0^y \frac{A(y')}{B(y')} dy'\right) \quad (11.15)$$

则该马可夫过程是稳恒的。另一方面，**线性 Fokker-Plank 方程**的定义为

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} (A_0 + A_1 y)P + \frac{1}{2} B_0 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \quad (11.16)$$

其中 A_0, A_1, B_0 都是常数。当 $A_1 < 0$ 时式(11.15)的解是高斯的，此时该稳恒马可夫过程是 Ornstein-Uhlenbeck 过程。当 $A_1 \geq 0$ 时没有稳定的概率分布。

相比于通常意义的主方程，Fokker-Plank 方程具有两点优势：（1）Fokker-Plank 方程是微分方程，不是微分-积分方程。（2）求解方程不需要知道所有的跃迁几率 $W(y|y')$ ，而只需要知道函数 $A(y)$ 和 $B(y)$ 。如果某个物理量 y 可以看作马可夫过程，在很短的时间间隔 Δt 内 y 只有缓慢的变化，则根据

$$\frac{\langle \Delta y \rangle}{\Delta t} = A(y), \quad \frac{\langle (\Delta y)^2 \rangle}{\Delta t} = B(y), \quad \frac{\langle (\Delta y)^v \rangle}{\Delta t} = 0 \quad (v \geq 3). \quad (11.17)$$

可以得到 $A(y)$ 和 $B(y)$ 的表达式，从而确定相应的 Fokker-Plank 方程。

11.3. 布朗运动 (Brownian motion)

一维布朗运动是粒子在 X 轴上作向前或者向后的随机跳跃。大幅度跳跃的概率衰减得

很快，跳跃的概率是对称的而且与起始点无关，所以

$$a_1 = \frac{\langle \Delta X \rangle_x}{\Delta t} = 0, \quad a_2 = \frac{\langle (\Delta X)^2 \rangle_x}{\Delta t} = \text{const.} \quad (11.18)$$

对应的 Fokker-Plank 方程为

$$\frac{\partial P(X, t)}{\partial t} = \frac{a_2}{2} \frac{\partial^2 P(X, t)}{\partial X^2} \quad (11.19)$$

这是一个扩散方程，其扩散系数为

$$D = \frac{a_2}{2} \quad (11.20)$$

又根据式(11.17)，可得爱因斯坦公式

$$D = \frac{\langle (\Delta X)^2 \rangle_x}{2\Delta t} \quad (11.21)$$

布朗运动是 Wiener 过程。设初始条件为 $P(X, 0) = \delta(X)$ ，则解为

$$P(X, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{X^2}{4Dt}\right) \quad (11.22)$$

再考虑该布朗粒子在 $-X$ 方向上受到重力 Mg 作用下的情形。如果周围的液体对粒子的摩擦作用为 $M\gamma$ ，则平均迁移速率为 $-g/\gamma$ ，则

$$a_1 = \frac{\langle \Delta X \rangle_x}{\Delta t} = -\frac{g}{\gamma}, \quad a_2 = 2D \quad (11.23)$$

相应的 Fokker-Plank 方程为

$$\frac{\partial P(X, t)}{\partial t} = \frac{g}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial X} + D \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \quad (11.24)$$

当 $X \in (-\infty, +\infty)$ 时，上式无稳恒解。当限制 $X > 0$ 且给定边界条件

$$\frac{g}{\gamma} P + D \frac{\partial P}{\partial X} = 0, \quad X = 0 \quad (11.25)$$

则式(11.24)存在稳恒解，由平衡态统计物理知识可知此解即气压密度公式：

$$P^e(X) \sim \exp\left(-\frac{Mg}{k_B T} X\right) \quad (11.26)$$

并且有爱因斯坦关系

$$D = \frac{k_B T}{M \gamma} \quad (11.27)$$

和式(11.21)联立可以得到关系

$$\frac{\langle (\Delta X)^2 \rangle_x}{\Delta t} = \frac{2k_B T}{M \gamma} \quad (11.28)$$

11.4. 瑞利粒子 (Rayleigh particle)

瑞利粒子和布朗粒子是相同的粒子，只是在更小的时间尺度内考察。时间间隔 Δt 比速度弛豫小得多，但还是比粒子单次碰撞的特征时间大得多。因此需要考虑的是关于速率而非位置的随机函数。

宏观上，当速率 V 不太大时，满足线性阻尼定律：

$$\dot{V} = -\gamma V \quad (11.29)$$

因此

$$a_1(V) = \frac{\langle \Delta V \rangle_V}{\Delta t} = -\gamma V \quad (11.30)$$

当 V 不太大时，因为二阶跳跃矩必须为正，所以可以看作常数：

$$a_2(V) = a_{2,0} + O(V^2) \approx a_{2,0} \quad (11.31)$$

其中 $a_{2,0} \equiv a_2(V=0)$ 。相应的 Fokker-Plank 方程为

$$\frac{\partial P(V,t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial V} V P + \frac{a_{2,0}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \quad (11.32)$$

由平衡态统计物理知识可知上式的稳恒解为

$$P^e(V) = \left(\frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{M}{2k_B T} V^2 \right) \quad (11.33)$$

代入式(11.32)得到

$$\frac{a_{2,0}}{2} = \gamma \frac{k_B T}{M} \quad (11.34)$$

从而得到针对重粒子的速率概率密度的瑞利公式：

$$\frac{\partial P(V,t)}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial V} V P + \frac{k_B T}{M} \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right) \quad (11.35)$$

这也是一个线性 Fokker-Plank 方程，它的平衡态解是 Ornstein-Uhlenbeck 过程。

以下从瑞利粒子理论还原到布朗粒子理论。考虑各自独立的全同瑞利粒子，在 $t=0$ 时

全部位于 $X=0$ ，并且具有平衡态的速率分布。速率随时间的演化服从 Ornstein-Uhlenbeck 过程，而位置作为随机过程服从

$$X(t) = \int_0^t V(t') dt' \quad (11.36)$$

因为 $V(t)$ 的分布是高斯的，所以 $X(t)$ 的分布也是高斯的，且

$$\langle X(t) \rangle = \int_0^t \langle V(t') \rangle dt' = 0 \quad (11.37)$$

位置关联

$$\langle X(t_1) X(t_2) \rangle = \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' \langle V(t') V(t'') \rangle = \langle V^2 \rangle \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' \exp(-\gamma |t' - t''|) \quad (11.38)$$

令 $0 \leq t_1 \leq t_2$ ，解得

$$\langle X(t_1) X(t_2) \rangle = \frac{k_B T}{M} \left(\frac{2}{\gamma} t_1 - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2} (\exp(-\gamma t_1) + \exp(-\gamma t_2) - \exp(-\gamma(t_2 - t_1))) \right) \quad (11.39)$$

因为 $X(t)$ 是高斯的，以上的一阶和二阶矩足以给出它的解，但是它不是马可夫过程。为了还原到布朗粒子，必须对观察时间进行粗粒化：

$$t_2 \gg \frac{1}{\gamma}, \quad t_2 - t_1 \gg \frac{1}{\gamma} \quad (11.40)$$

从而由式(11.39)，有

$$\langle X(t_1) X(t_2) \rangle \sim \min(t_1, t_2) \quad (11.41)$$

还原为 Wiener 过程， $X(t)$ 与式(11.19)的解完全相同。这一理论过程可以直接定出常数 a_2 ，而不用借助于外加重力场的方法。

11.5. 多变量 Fokker-Plank 方程

对于多变量 $y_i, i=1, \dots, r$ ，相应的 Fokker-Plank 方程为

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial y_i} A_i(y) P + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} B_{ij}(y) P \quad (11.42)$$

其中系数 $A_i(y)$ 和 $B_{ij}(y)$ 可以是任意实可微函数，唯一的限制是 $B_{ij}(y)$ 必须是对称和正定的，

即对于任意矢量 $\{x_i\}$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^r B_{ij}(y) x_i x_j \geq 0 \quad (11.43)$$

两个系数的物理意义为当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,

$$A_i(y) = \frac{\langle \Delta y_i \rangle_y}{\Delta t}, \quad B_{ij}(y) = \frac{\langle \Delta y_i \Delta y_j \rangle_y}{\Delta t} \quad (11.44)$$

多变量 Fokker-Plank 方程的线性化形式为

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = - \sum_{i,j} A_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} y_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial y_i \partial y_j} \quad (11.45)$$

其中 A_{ij} 和 B_{ij} 是常数矩阵, 并且 B_{ij} 是满足式(11.43)的对称阵。

以下将对初始条件

$$P(y,0) = \prod_{i=1}^r \delta(y_i - y_{i0}) = \delta^r(y - y_0) \quad (11.46)$$

求解式(11.45), 可以得到完全取决于一阶矩和二阶矩的高斯解。因此, 首先计算这两阶矩。

式(11.45)两边乘以 y_k 并对所有 y 进行积分, 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle y_k \rangle = \sum_j A_{kj} \langle y_j \rangle \quad (11.47)$$

上式对于初始条件式(11.46)的解为

$$\langle y \rangle_t = \exp(tA) y_0 \quad (11.48)$$

再对式(11.45)两边乘以 $y_k y_l$ 并积分, 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle y_k y_l \rangle = \sum_i A_{ki} \langle y_i y_l \rangle + \sum_j A_{lj} \langle y_k y_j \rangle + B_{kl} \quad (11.49)$$

由协方差 $\Xi_{kl} \equiv \langle y_k y_l \rangle - \langle y_k \rangle \langle y_l \rangle$ 和式(11.47), 可以把式(11.49)写成

$$\frac{\partial}{\partial t} \Xi = A\Xi + \Xi\tilde{A} + B \quad (11.50)$$

其中 $\tilde{A}$ 是 A 的转置矩阵。

把变换 $\Xi(t) = \exp(tA) \Xi^*(t) \exp(t\tilde{A})$ 代入上式, 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \Xi^*(t) = \exp(-tA) B \exp(-t\tilde{A}) \quad (11.51)$$

在初始条件 $\Xi^*(0) = 0$ 下对时间积分, 得到

$$\Xi^*(t) = \int_0^t \exp(-t'A) B \exp(-t'\tilde{A}) dt' \quad (11.52)$$

即

$$\Xi(t) = \int_0^t \exp((t-t')A) B \exp((t-t')\tilde{A}) dt' \quad (11.53)$$

由此构建的高斯分布

$$P(y, t) = (2\pi)^{-r/2} (\text{Det}\Xi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\tilde{y} - \langle \tilde{y} \rangle) \Xi^{-1} (y - \langle y \rangle)\right) \quad (11.54)$$

可以证明是式(11.45)的解。

以下直接对式(11.45)进行求解。先进行傅里叶变换，得到关于矩产生函数的方程：

$$\frac{\partial G(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \sum_{i,j} A_{ij} k_i \frac{\partial G}{\partial k_j} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij} k_i k_j G \quad (11.55)$$

由上式可知

$$\frac{\partial}{\partial t} k_j = -\sum_i k_i A_{ij} \quad (11.56)$$

其解为

$$\mathbf{k} = \exp(-t\tilde{A})\mathbf{c} \quad (11.57)$$

其中 $\mathbf{c}$ 是一个包括 r 个常数的矢量。矩产生函数随时间的变化为

$$\frac{d \ln G}{dt} = -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{k}} \mathbf{B} \mathbf{k} = -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{c}} \exp(-tA) B \exp(-t\tilde{A}) \mathbf{c} \quad (11.58)$$

所以有

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}, t) &= \Omega(\mathbf{c}) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \tilde{\mathbf{c}} \exp(-tA) B \exp(-t\tilde{A}) \mathbf{c} dt'\right) \\ &= \Omega(\exp(t\tilde{A})\mathbf{k}) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{k} \exp((t-t')A) B \exp((t-t')\tilde{A}) \mathbf{k} dt'\right) \end{aligned} \quad (11.59)$$

前置系数由初值决定：

$$\Omega(\exp(t\tilde{A})\mathbf{k}) = G(\mathbf{k}, 0) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}_0) \quad (11.60)$$

因此最终得到满足式(11.45)的矩产生函数解为

$$G(\mathbf{k}, t) = \exp\left(i\tilde{\mathbf{k}} \exp(tA) \mathbf{y}_0 - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{k}} \cdot \int_0^t \exp((t-t')A) B \exp((t-t')\tilde{A}) \mathbf{k} dt'\right) \quad (11.61)$$

该解对于辅助变量 $\mathbf{k}$ 是二次的，所以是关于 y 的高斯分布，其均值等同于式(11.48)，关联等同于式(11.53)，由此证明了式(11.54)确实是式(11.45)的解。

对于 A_{ij} 和 B_{ij} 是时间的函数的情形，均值的解有形式

$$\langle y \rangle_t = Y(t) y_0 \quad (11.62)$$

其中演化矩阵 $Y(t)$ 由以下矩阵方程决定：

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t), \quad Y(0) = 1 \quad (11.63)$$

类似地，式(11.50)中的矩阵 A 和 B 现在是时间的函数，所以协方差矩阵

$$\begin{aligned} \Xi(t) &= Y(t)\Xi^*(t)\tilde{Y}(t) \\ &= \int_0^t Y(t)Y^{-1}(t')B(t')\tilde{Y}^{-1}(t')\tilde{Y}(t)dt' \end{aligned} \quad (11.64)$$

该式代入式(11.54)里，和式(11.62)一起构成了含时系数的线性 Fokker-Plank 方程的解。

11.6. Kramers 方程

外力作用下的 Fokker-Plank 方程式(11.24)可以扩展成**准线性 Fokker-Plank 方程**：

$$\frac{\partial P(X,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X} \frac{F(X)}{M\gamma} P + D \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \quad (11.65)$$

其中二次项的系数为常数，但是一次项的系数是非线性的。这个方程只有当 $F(X)$ 的变化很缓慢时才成立，否则解必须是位置和速度的联合概率分布 $P(X,V,t)$ 。

一阶项系数的相关量为

$$\langle \Delta X \rangle_{x,v} = V\Delta t, \quad \langle \Delta V \rangle_{x,v} = \left(\frac{F(X)}{M} - \gamma V \right) \Delta t \quad (11.66)$$

二阶项系数的相关量为

$$\begin{aligned} \frac{\langle (\Delta X)^2 \rangle_{x,v}}{\Delta t} &= V^2 \Delta t \rightarrow 0 \\ \frac{\langle \Delta X \Delta V \rangle_{x,v}}{\Delta t} &= V \left(\frac{F(X)}{M} - \gamma V \right) \Delta t \rightarrow 0 \\ \frac{\langle (\Delta V)^2 \rangle_{x,v}}{\Delta t} &= \gamma \frac{k_B T}{M} \end{aligned} \quad (11.67)$$

由此得到双变量的准线性 Fokker-Plank 方程，即 **Kramers 方程**：

$$\frac{\partial P(X,V,t)}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{F(X)}{M} \frac{\partial P}{\partial V} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial V} V P + \frac{k_B T}{M} \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right) \quad (11.68)$$

以下在 γ 很大的条件下，采用求解玻尔兹曼方程的 Chapman-Enskog 近似展开方法，对

γ^{-1} 作泰勒展开系统求解 Kramers 方程。首先做变量代换 $v \equiv \frac{V}{\sqrt{k_B T / M}}$, $x \equiv \frac{X}{\sqrt{k_B T / M}}$,

$f(x) \equiv \frac{F(X)}{\sqrt{k_B T / M}}$ 以简化符号，上式变成

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(vP + \frac{\partial P}{\partial v} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} + f(x) \frac{\partial}{\partial v} \right) P \quad (11.69)$$

把解进行 Chapman-Enskog 展开：

$$P(x, v, t) = P^{(0)} + \gamma^{-1} P^{(1)} + \gamma^{-2} P^{(2)} + \dots \quad (11.70)$$

第零阶方程为

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(vP^{(0)} + \frac{\partial P^{(0)}}{\partial v} \right) = 0 \quad (11.71)$$

该方程解的形式为

$$P^{(0)}(x, v, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) \phi(x, t) \quad (11.72)$$

其中 $\phi(x, t)$ 目前为止是一个任意的函数。

第一阶方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} v + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) P^{(1)} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} - v f \phi \right) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \quad (11.73)$$

上式对 v 积分，得到约束条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (11.74)$$

即 ϕ 和 $P^{(0)}$ 必须不依赖于时间，上式简化成

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(v + \frac{\partial}{\partial v} \right) P^{(1)} = \left(\frac{d \phi}{dx} - f \phi \right) v \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \quad (11.75)$$

满足上式的解为

$$P^{(1)}(x, v, t) = v \left(f \phi - \frac{d \phi}{dx} \right) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) + \psi(x, t) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \quad (11.76)$$

其中 $\psi(x, t)$ 目前为止是一个任意的函数。

类似地，由第二阶方程

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial v} v + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) P^{(2)} &= v^2 \frac{d}{dx} \left(f \phi - \frac{d \phi}{dx} \right) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \\ &+ (1 - v^2) f \left(f \phi - \frac{d \phi}{dx} \right) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} - v f \psi \right) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (11.77)$$

对 v 积分，可以得到约束条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} - f\phi \right) \quad (11.78)$$

满足以上约束条件的解可以表示成

$$P(x, v, t) = \exp \left(-\frac{v^2}{2} \right) \left(\phi(x) + \gamma^{-1} v \left(f\phi - \frac{d\phi}{dx} \right) + \gamma^{-1} \psi(x, t) + O(\gamma^{-2}) \right) \quad (11.79)$$

对 v 积分得到相应的边际分布解

$$P(x, t) = \sqrt{2\pi} \left(\phi(x) + \gamma^{-1} \psi(x, t) + O(\gamma^{-2}) \right) \quad (11.80)$$