非平衡统计物理

王延颢

2021年8月23日

1. 随机变量与随机过程

1.1. 随机变量和矩

一维实空间上, 一个随机变量 X 的**概率密度函数** $p(x)$ 满足非负条件 $p(x) \geq 0$ 和归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$ 。随机变量 X 取值在 x 和 $x+dx$ 之间的概率为 $p(x)dx$ 。离散变量可以通过以下变换得到:

$$p(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \quad (1.1)$$

其中 $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$ 。

X 的函数 $f(X)$ 的均值为

$$\langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx \quad (1.2)$$

特别地, m 阶矩 (moment) 定义为

$$\mu_m = \langle X^m \rangle \quad (1.3)$$

一阶矩就是 X 的期望值。**方差** (variance)

$$\sigma_x^2 \equiv \langle \langle X^2 \rangle \rangle = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \mu_2 - \mu_1^2 \quad (1.4)$$

方差的开方 $\Delta X \equiv \sigma$ 就是**标准偏差** (standard deviation) 或叫做**均方根偏差** (root-mean-square deviation)。

如果当 $x \rightarrow \infty$ 时, $p(x)$ 衰减不够快的话, X 的某些矩有可能无定义。例如 Lorentz law (或者叫 Cauchy law)

$$p(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{(x - x_0)^2 + a^2}, \quad a > 0 \quad (1.5)$$

任意阶矩都发散。

1.2. 特征函数

随机变量 X 的**特征函数**定义为 $p(x)$ 的傅立叶变换

$$G(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p(x) dx \quad (1.6)$$

从而

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} G(k) dk \quad (1.7)$$

具有性质 $G(k=0)=1$ 和 $|G(k)| \leq 1$ 。特征函数也叫做**矩产生函数**，因为对 k 作泰勒展开的系数就是矩：

$$G(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \mu_m \quad (1.8)$$

但是即使一个函数的矩不存在时，也可以有产生函数。例如式(1.5)的产生函数为

$$G(k) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x-x_0)^2 + a^2} dx = e^{-a|k|+ikx_0} \quad (1.9)$$

在 $k=0$ 处上式不可导，对应于式(1.5)不存在矩。

1.3. 多变量分布

对于 n 维随机变量 $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ ，其概率密度 $p_n(x_1, \dots, x_n)$ 称为 n 个随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 的**联合概率密度** (joint probability density)。其子集 $X_1, \dots, X_s$ ， $s < n$ 的概率密度

$$p_s(x_1, \dots, x_s) = \int p_n(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) dx_{s+1} \dots dx_n \quad (1.10)$$

称为这 s 个相关变量的**边际概率密度** (marginal probability density)。在给定 $x_{s+1}, \dots, x_n$ 值的条件下， $X_1, \dots, X_s$ 的**条件概率密度** (conditional probability density) 记为

$p_{s|n-s}(x_1, \dots, x_s | x_{s+1}, \dots, x_n)$ 。

因为

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = p_{n-s}(x_{s+1}, \dots, x_n) p_{s|n-s}(x_1, \dots, x_s | x_{s+1}, \dots, x_n) \quad (1.11)$$

所以有**贝叶斯定律**：

$$p_{s|n-s}(x_1, \dots, x_s | x_{s+1}, \dots, x_n) = \frac{p_n(x_1, \dots, x_n)}{p_{n-s}(x_{s+1}, \dots, x_n)} \quad (1.12)$$

如果两组子集的概率密度是统计独立的，则有

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = p_{n-s}(x_{s+1}, \dots, x_n) p_s(x_1, \dots, x_s) \quad (1.13)$$

多变量分布的矩定义为

$$\langle X_1^{m_1}, \dots, X_n^{m_n} \rangle = \int p_n(x_1, \dots, x_n) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} dx_1 \dots dx_n \quad (1.14)$$

相应的特征函数

$$G_n(k_1, \dots, k_n) = \langle e^{i(k_1 X_1 + \dots + k_n X_n)} \rangle = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(ik_1)^{m_1} \dots (ik_n)^{m_n}}{m_1! \dots m_n!} \langle X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} \rangle \quad (1.15)$$

如果两个子集统计独立，则对应的特征函数是简单的乘积关系：

$$G_n(k_1, \dots, k_s, k_{s+1}, \dots, k_n) = G_s(k_1, \dots, k_s) G_{n-s}(k_{s+1}, \dots, k_n) \quad (1.16)$$

同理，矩之间也是简单的乘积关系：

$$\langle X_1^{m_1} \dots X_s^{m_s} X_{s+1}^{m_{s+1}} \dots X_n^{m_n} \rangle = \langle X_1^{m_1} \dots X_s^{m_s} \rangle \langle X_{s+1}^{m_{s+1}} \dots X_n^{m_n} \rangle \quad (1.17)$$

对于 n 个随机变量，定义 $n \times n$ 的**协方差**（covariance）矩阵的矩阵元为

$$C_{ij} = \langle (X_i - \langle X_i \rangle)(X_j - \langle X_j \rangle) \rangle = \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle \quad (1.18)$$

对角元就是之前定义的方差，一定是非负数，而非对角元上的协方差可以是任意值。可以证明 $|C_{ij}|^2 \leq \sigma_i^2 \sigma_j^2$ 。归一化的**关联系数**（correlation coefficient）

$$c_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle}{\sigma_i \sigma_j} \quad (1.19)$$

取值在-1到+1之间，如果取值为零则两个变量不相关。不相关条件比统计独立条件要弱。

复随机变量 $Z = X + iY$ 由两个实随机变量组成，概率密度 $p_Z(z)$ 是 X 和 Y 的联合密度。

归一化条件为

$$\int p_Z(z) d^2 z = 1, \quad d^2 z = dx dy \quad (1.20)$$

方差 $\sigma_i^2 = \langle |Z_i - \langle Z_i \rangle|^2 \rangle$ 是非负实数。多个复变量 $Z_1, \dots, Z_n$ 的协方差矩阵元为

$$C_{ij} = \langle (Z_i - \langle Z_i \rangle)(Z_j^* - \langle Z_j^* \rangle) \rangle = \langle Z_i Z_j^* \rangle - \langle Z_i \rangle \langle Z_j^* \rangle \quad (1.21)$$

关联系数 c_{ij} 是模小于 1 的复数。

两个独立随机变量 X_1, X_2 之和 $Y = X_1 + X_2$ 所服从的分布

$$p_Y(y) = \int p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(y - x_1) dx_1 \quad (1.22)$$

是这两个独立随机变量的卷积。对应的特征函数

$$G_Y(k) = G_{X_1}(k) G_{X_2}(k) \quad (1.23)$$

无论 X_1, X_2 是否相关，都有

$$\langle Y \rangle = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle \quad (1.24)$$

而只有当 X_1, X_2 不相关时, 才有

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 \quad (1.25)$$

和产生函数

$$G_Y(k) = G_{X_1}(k) G_{X_2}(k) \quad (1.26)$$

1.4. 高斯分布

单变量高斯分布的数学形式为

$$p(x) = C e^{-\frac{1}{2}Ax^2 - Bx} \quad (1.27)$$

其中归一化常数

$$C = \sqrt{\frac{A}{2\pi}} e^{-B^2/2A} \quad (1.28)$$

令 $\mu = -B/A$, $\sigma^2 = 1/A$, 可以把高斯分布写成常用形式

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.29)$$

其中 μ 就是均值, σ^2 就是方差。对应的特征函数为

$$G(k) = \exp\left(i\mu k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right) \quad (1.30)$$

因为特征函数在 $k=0$ 处无限可微, 所以高斯分布的所有阶矩都为有限值。 n 个独立同高斯分布变量之和 $Y = X_1 + \dots + X_n$ 的均值和方差都是单变量高斯分布之和。

含有 n 个随机变量的高斯分布形式为

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = C \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^n B_i x_i\right) = C \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}\right) \quad (1.31)$$

归一化因子

$$C = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{A}|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}\right) \quad (1.32)$$

其中 $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}$ 。对应的特征函数为

$$G_n(\mathbf{k}) = \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{k} - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}\right) \quad (1.33)$$

均值为

$$\langle X_i \rangle = -\sum_j M_{ij} B_j \quad (1.34)$$

方差的矩阵元为

$$C_{ij} = \langle (X_i - \langle X_i \rangle)(X_j - \langle X_j \rangle) \rangle = M_{ij} \quad (1.35)$$

当 n 个自变量不相关时， $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}$ 都是对角矩阵，所以自变量是独立的。因此，对于高斯分布而言，不相关和统计独立是等价的。

当只有两个自变量时，协方差矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ c_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

它的逆矩阵为

$$\mathbf{A} = \frac{1}{1-c_{12}^2} \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & -c_{12}/\sigma_1\sigma_2 \\ -c_{12}/\sigma_1\sigma_2 & 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

对应的行列式值为

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-c_{12}^2)} \quad (1.38)$$

所以两变量高斯分布（均值为 $\mathbf{0}$ ）可以写成

$$p_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1\sigma_2(1-c_{12}^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-c_{12}^2)}\left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2c_{12}x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right) \quad (1.39)$$

高斯分布的一个重要特征是所有的高阶关联都可以用两阶关联来表示。对于均值为 $\mathbf{0}$ 的多变量高斯分布变量而言，所有的奇数阶矩为 $\mathbf{0}$ ，而偶数阶矩

$$\langle X_i X_j X_k X_l \dots \rangle = \sum \langle X_p X_q \rangle \langle X_u X_v \rangle \dots \quad (1.40)$$

其中求和遍历所有可能的成对情形。

1.5. 中心极限定理

如果 N 个统计独立的随机变量 $X_1 \dots X_N$ 都服从均值为 $\mathbf{0}$ ，方差为 σ^2 的高斯分布，则随机变量 $Y_N = \frac{1}{\sqrt{N}}(X_1 + \dots + X_N)$ 依然服从均值为 $\mathbf{0}$ ，方差为 σ^2 的高斯分布。从这个意义上说，高斯分布是一种**稳定的**随机分布。

拉普拉斯在 1812 年阐述了**中心极限定理**的内容为：即使 X_i 不是高斯分布，当 $N \rightarrow \infty$ 时，上述 Y_N 依然服从均值为 $\mathbf{0}$ ，方差为 σ^2 的高斯分布。为了证明该定理，可以考虑任一分布

$p_X(x)$ 的特征函数

$$G_X(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p_X(x) dx \quad (1.41)$$

因为 X_i 是统计独立的，所以

$$G_{Y_N}(k) = \left[G_X \left(\frac{k}{N^{1/2}} \right) \right]^N \quad (1.42)$$

两边取对数，得

$$\ln G_{Y_N}(k) = N \ln G_X \left(\frac{k}{N^{1/2}} \right) \quad (1.43)$$

把 $G_X \left(\frac{k}{N^{1/2}} \right)$ 对 $\frac{k}{N^{1/2}}$ 做泰勒展开，得到

$$\ln G_X \left(\frac{k}{N^{1/2}} \right) = -\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{k^2}{N} + O \left(\frac{k^3}{N^{3/2}} \right) \quad (1.44)$$

上式代入式(1.43)，得到

$$\ln G_{Y_N}(k) = -\frac{1}{2} \sigma^2 k^2 + O \left(\frac{k^3}{N^{1/2}} \right) \quad (1.45)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时， $O \left(\frac{k^3}{N^{1/2}} \right)$ 趋于零， $G_{Y_N}(k)$ 趋近于均值为 0，方差为 σ^2 的高斯分布。

事实上，要求 $X_1, \dots, X_n$ 统计独立和有限方差是中心极限定理的充分非必要条件，可以放宽为无长程关联（没有 $|i-j| \gg 1$ 的两个变量之间的关联）及方差“不太宽”条件

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^2 \frac{\int_{|x|>y} p_X(x) dx}{\int_{|x|<y} x^2 p_X(x) dx} = 0 \quad (1.46)$$

中心极限定理依然成立。

1.6. 随机过程

如果一个随机变量是时间的函数 $X(t)$ ，则 $X(t)$ 被称为**随机过程**，对应的概率分布

$p(x, t)$ 在每个时刻 t 都满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) dx = 1 \quad (1.47)$$

在 t 时刻的均值定义为

$$\langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x^{(r)}(t) \quad (1.48)$$

两个时间点随机变量的联合概率 $p_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ 满足一致性条件

$$\int p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2 = p_1(x_1, t_1) \quad (1.49)$$

说明对于 x_2 的积分与 t_2 无关。两个时间点乘积的均值为

$$\langle X_1(t) X_2(t) \rangle = \int x_1 x_2 p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (1.50)$$

同一随机过程的时间自相关函数为

$$C(t_1, t_2) = \langle [X(t_1) - \langle X(t_1) \rangle][X(t_2) - \langle X(t_2) \rangle] \rangle = \langle X(t_1)X(t_2) \rangle - \langle X(t_1) \rangle \langle X(t_2) \rangle \quad (1.51)$$

扩展到多时间点情形，对于 $s < n$ ，有一致性条件

$$\int p_n(x_1, t_1; \dots; x_s, t_s; \dots; x_n, t_n) dx_{s+1} \dots dx_n = p_s(x_1, t_1; \dots; x_s, t_s) \quad (1.52)$$

多时间点关联为

$$\langle X(t_1) \dots X(t_n) \rangle = \int x_1 \dots x_n p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1.53)$$

对于有多个变量的随机过程，可以定义矩阵 $\mathbf{X}(t) \equiv \{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ ，对应的关联矩阵的矩阵元为

$$C_{ij}(t_1, t_2) = \langle X_i(t_1)X_j(t_2) \rangle - \langle X_i(t_1) \rangle \langle X_j(t_2) \rangle \quad (1.54)$$

对角元代表**自相关**，非对角元代表**互相关**。

对于一个复变量的随机过程 $Z(t) = \{X(t), Y(t)\}$ ，其概率密度 $p(z, t)$ 是 X 和 Y 在 t 时刻的联合概率密度。 $Z(t)$ 的均值为

$$\langle Z(t) \rangle = \int zp(z, t) d^2z \quad (1.55)$$

复变量的自相关函数

$$C(t_1, t_2) = \langle Z(t_1)Z^*(t_2) \rangle - \langle Z(t_1) \rangle \langle Z^*(t_2) \rangle \quad (1.56)$$

如果一个随机过程的联合概率密度 $p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ 是高斯分布，则这一随机过程被称为**高斯过程**。因为高斯分布的数学特性，高斯过程的所有特性都可以用单时间点均值 $\langle X(t) \rangle$ 和两时间点均值 $\langle X(t_1)X(t_2) \rangle$ 完全描述。例如，对于均值为零的高斯过程，

$$\langle X(t_i)X(t_j)X(t_k)X(t_l)\dots \rangle = \sum \langle X(t_p)X(t_q) \rangle \langle X(t_u)X(t_v) \rangle \dots \quad (1.57)$$

其中求和遍历所有可能的对，所有奇数个乘积的均值都为零。

1.7. 稳态和各态历经

如果一个随机过程所有的概率密度 p_n 对于起始时间平移不变，则这一随机过程处于**稳态**。对于任意的时间点个数 n 和时间间隔 T ，有

$$\langle X(t_1+T)\cdots X(t_n+T) \rangle = \langle X(t_1)\cdots X(t_n) \rangle \quad (1.58)$$

此时自相关函数只依赖于时间间隔 $\tau \equiv t_1 - t_2$ ，即 $C(t_1, t_2) = C(\tau)$ 。物理中常见的自相关函数具有指数衰减的特性：

$$C(\tau) = C_0 \exp(-|\tau|/\tau_c) \quad (1.59)$$

当 $|\tau| \gg \tau_c$ 时， $C(\tau) \rightarrow 0$ ，因此 τ_c 是该随机过程的特征**关联时间**。

对于多变量稳态随机过程，关联矩阵的矩阵元

$$C_{ij}(\tau) = \langle X_i(\tau)X_j(0) \rangle - \langle X_i(\tau) \rangle \langle X_j(0) \rangle \quad (1.60)$$

存在关系

$$C_{ij}(\tau) = C_{ij}(-\tau) \quad (1.61)$$

如果一个稳态随机过程 $X(t)$ 的任意单一实现 $x(t)$ 都包含了 $X(t)$ 的所有统计信息，则称 $X(t)$ 是**各态历经**的。

考虑 $X(t)$ 在时间段 $\left(t - \frac{T}{2}, t + \frac{T}{2}\right)$ 的时间平均

$$\bar{X}(t)^T = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(t') dt' \quad (1.62)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时，对于稳态来说，上式不再依赖于 T 和 t ，成为 $X(t)$ **时间平均** 的定义

$$\bar{X} = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{X}(t)^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(t') dt' \quad (1.63)$$

如果时间平均不依赖于具体实现，则完全等价于系综平均 $\langle X \rangle$ ，这种情况下 $X(t)$ 是各态历经的。

1.8. 离散时间随机行走

一维粒子每次以等概率随机地向左或者向右移动一步，以离散随机变量记为 $X_j (j=1, 2, \dots, r)$ ，取值为 1 或者 -1 的概率都是 1/2。从位置 0 开始，走了 r 步之后的位置为

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_r \quad (1.64)$$

显然其均值为 $\langle Y \rangle = 0$ 。因为每步之间完全独立，有

$$\langle Y^2 \rangle = r \langle X^2 \rangle = r \quad (1.65)$$

单位时间的平均位移

$$\left\langle \left(\frac{Y}{r} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad (1.66)$$

对应的特征函数

$$G_Y(k, r) = [G_X(k)]^r = \left(\frac{1}{2} e^{ik} + \frac{1}{2} e^{-ik} \right)^r \quad (1.67)$$

则由式(1.41)得到 Y 取值为 n 的概率为因子 e^{ink} 前面的系数

$$p_n(r) = C_r \frac{1}{2^r} \quad (1.68)$$

1.9. 随机变量代换

如果有关系 $Y = f(X)$ ，则 Y 在区间 $(y, y + \Delta y)$ 取值的概率为

$$p_Y(y) \Delta y = \int_{y < f(x) < y + \Delta y} p_X(x) dx \quad (1.69)$$

等价于

$$p_Y(y) = \int \delta[f(x) - y] p_X(x) dx \quad (1.70)$$

由上式可以得到相应的特征函数

$$G_Y(k) = \langle e^{ikf(x)} \rangle \quad (1.71)$$

以上公式可以扩展到多个变量，如具有麦克斯韦分布的三维粒子速度 $\mathbf{X} = (v_x, v_y, v_z)$ ，

与动能的变换关系为 $E_K = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ ，则动能的概率密度是卡方分布：

$$\begin{aligned} p(E) &= \int \delta\left(\frac{1}{2} m v^2 - E\right) \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-m v^2 / 2 k_B T} dv_x dv_y dv_z \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi} (k_B T)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-E/k_B T} \end{aligned} \quad (1.72)$$

当 X 和 Y 的变量数相等，都为 r 时，有

$$p_Y(y) = p_X(x) J \quad (1.73)$$

其中 J 是相应的 Jacobi 行列式的绝对值。上式也可以写成

$$p_Y(y) dy = \pm p_X(x) dx \quad (1.74)$$

上式取正号还是负号取决于概率密度的非负定义。

1.10. 稳态随机过程的简谐分析

一般而言，一个稳态随机过程 $X(t)$ 的具体实现 $x(t)$ 当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时不趋于零，因此既不可积，也不是平方可积，不存在通常意义下的傅里叶变换。但是可以把它的傅里叶变换定义在有限区间 $(0, T)$

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^T x(t) e^{i\omega t} dt \quad (1.75)$$

逆变换为

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.76)$$

傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-i\omega_n t}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.77)$$

其中

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{i\omega_n t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.78)$$

对于稳态随机过程，

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\omega_n t}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.79)$$

其中

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) e^{i\omega_n t} dt = \frac{1}{T} X(\omega_n) \quad (1.80)$$

a_n 是 A_n 的一个具体实现。

对于稳态随机过程， $\langle X(t) \rangle = \langle X \rangle$ 是一个常数，则

$$\begin{cases} \langle A_0 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle X(t) \rangle dt = \langle X \rangle \\ \langle A_n \rangle = 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.81)$$

稳态随机过程的自相关函数

$$C(\tau) = \langle X^*(t) X(t+\tau) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \langle A_n A_{n'}^* \rangle e^{-i(\omega_n - \omega_{n'})t} e^{-i\omega_{n'}\tau} \quad (1.82)$$

这个表达式应该与 t 无关，所以

$$\langle A_n A_{n'}^* \rangle = \langle |A_n|^2 \rangle \delta_{n, n'} \quad (1.83)$$

即角频率不相等的两个傅里叶系数之间没有关联。

1.11. Wiener-Khintchine 定理

定义谱密度（或者功率谱）为

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \langle |A_n|^2 \rangle \quad (1.84)$$

由式(1.80)可知

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |X(\omega)|^2 \rangle \quad (1.85)$$

Wiener-Khintchine 定理说明一个稳态随机过程的自相关函数和谱密度是傅里叶变换的关系，即

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \quad (1.86)$$

和

$$C(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega \quad (1.87)$$

以下证明该定理。由式(1.80)，有

$$\langle |A_n|^2 \rangle = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \langle X(t) X(t') \rangle e^{i\omega_n(t-t')} dt dt' \quad (1.88)$$

当 $t > t'$ 时，把对 t 和 t' 的双重积分变换为对 $\tau \equiv t - t'$ 和 t' 的双重积分，有

$$\langle |A_n|^2 \rangle_{t > t'} = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^{T-\tau} dt' C(\tau) e^{i\omega_n \tau} d\tau = \frac{1}{T^2} \int_0^T (T-\tau) C(\tau) e^{i\omega_n \tau} d\tau \quad (1.89)$$

同理，对于 $t < t'$ ，有

$$\langle |A_n|^2 \rangle_{t < t'} = \frac{1}{T^2} \int_0^T (T-\tau) C(-\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau = \frac{1}{T^2} \int_{-T}^0 (T+\tau) C(\tau) e^{i\omega_n \tau} d\tau \quad (1.90)$$

所以有

$$\langle |A_n|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) C(\tau) e^{i\omega_n \tau} d\tau \quad (1.91)$$

上式代入式(1.84)可得

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) C(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \quad (1.92)$$