非平衡统计物理

王延颋

2019 年 10 月 29 日

8. 从玻尔兹曼方程到流体动力学方程

对于经典稀薄气体，当研究的时间尺度远大于弛豫时间的尺度，即$\Delta t \gg \tau_{\mathrm{r}}$（对应于$\Delta l \gg l$）时，体系处于局域平衡态，可以用局域粒子密度$n(\mathbf{r},t)$，局域平均速度$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$和局域温度$T(\mathbf{r},t)$表征的流体动力学方程（hydrodynamic equations）进行描述。这些方程包含了导热率和粘滞系数在内的输运系数。这样得到的玻尔兹曼方程的解被称为**正规解**（normal solution）。

8.1. 局域均衡方程

从玻尔兹曼方程出发可以针对每个碰撞不变量，即质量、三维动量和随流体移动的参照系下的动能，推导出局域均衡方程。将某碰撞不变量记为$\chi(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$，有

$$\int \chi(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}} d\mathbf{p} = 0 \tag{8.1}$$

假设外力作用与速度无关，由玻尔兹曼方程可得

$$\int \chi(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} f\right) d\mathbf{p} = 0 \tag{8.2}$$

上式可以写成多项积分的形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \chi f \mathrm{d}\mathbf{p} - \int f\frac{\partial \chi}{\partial t}\mathrm{d}\mathbf{p} + \nabla_{\mathbf{r}}\cdot\int \chi \mathbf{v} f \mathrm{d}\mathbf{p} - \int \mathbf{v} f\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\chi \mathrm{d}\mathbf{p} + \int \nabla_{\mathbf{p}}\cdot(\chi \mathbf{F} f)\mathrm{d}\mathbf{p} - \int f\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\chi \mathrm{d}\mathbf{p} = 0 \tag{8.3}$$

其中第五项根据高斯定理，当$|\mathbf{p}|\to\infty$时为零，从而得到通用的**均衡定理**：

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\chi\rangle - n\left\langle\frac{\partial \chi}{\partial t}\right\rangle + \nabla_{\mathbf{r}}\cdot\langle n\chi\mathbf{v}\rangle - n\langle v\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\chi\rangle - n\left\langle\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\chi\right\rangle = 0 \tag{8.4}$$

其中n代表局域密度$n(\mathbf{r},t)$，局域系综平均的定义为

$$\langle A(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\rangle = \frac{\int f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) A(\mathbf{r},\mathbf{p},t) d\mathbf{p}}{\int f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) d\mathbf{p}} = \frac{1}{n(\mathbf{r},t)}\int f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) A(\mathbf{r},\mathbf{p},t) d\mathbf{p} \tag{8.5}$$

8.1.1. 质量的局域均衡方程

以下把$\nabla_{\mathbf{r}}$简记为∇。把$\chi = m$代入式(8.4)，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(mn) + \nabla \cdot \langle mn\mathbf{v} \rangle = 0 \tag{8.6}$$

由$\rho(\mathbf{r},t) = mn(\mathbf{r},t)$，上式成为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho \mathbf{u} \rangle = 0 \tag{8.7}$$

质量流$\mathbf{J} = \rho\mathbf{u}$是一个对流流，因为体系由全同粒子组成，所以没有扩散流。上式还可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{8.8}$$

其中物质导数或者流体动力学导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$。

8.1.2. 动量的局域均衡方程

把$\chi = mv_i\,(i = x, y, z)$代入式(8.4)，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \rho v_i \rangle + \nabla \cdot \langle \rho v_i \mathbf{v} \rangle - \frac{\rho}{m} F_i = 0 \tag{8.9}$$

由$\langle v_i v_j \rangle = \langle (v_i - u_i)(v_j - u_j) \rangle + u_i u_j$，可将上式的标量方程写成矢量形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \rho \mathbf{u} \rangle + \nabla \cdot \langle \rho \mathbf{u}\mathbf{u} + \underline{P} \rangle = \frac{\rho}{m}\mathbf{F} \tag{8.10}$$

其中压强张量$\underline{P}$的矩阵元为

$$P_{ij} = \rho \langle (v_i - u_i)(v_j - u_j) \rangle = \rho \langle v_i (v_j - u_j) \rangle \tag{8.11}$$

有外力$\mathbf{F}$作用时动量不是守恒量，$\rho\mathbf{u}$随时间的演化不仅有流项$\rho\mathbf{u}\mathbf{u} + \underline{P}$，还有源项$\frac{\rho}{m}\mathbf{F}$。根据式(8.7)，可以把式(8.10)写成等价形式

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \underline{P} \tag{8.12}$$

其中物质导数或者流体动力学导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$。

8.1.3. 内能的局域均衡方程

把$\chi = \frac{1}{2}m\left|\mathbf{v} - \mathbf{u}(r,t)\right|^2$代入式(8.4)，并利用$\left\langle \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\rangle = 0$和$\langle \nabla_p \chi \rangle = 0$，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \rho|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 \right\rangle + \frac{1}{2}\nabla \cdot \left\langle \rho \mathbf{v}|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 \right\rangle - \frac{1}{2}\rho\left\langle \mathbf{v} \cdot \nabla|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 \right\rangle = 0 \tag{8.13}$$

定义单位质量内能的局域密度

$$e_{\text{int}}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}\left\langle\left|\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right|^2\right\rangle \tag{8.14}$$

和热流

$$\mathbf{J}_Q=\frac{1}{2}\rho(\mathbf{r},t)\left\langle\left(\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right)\left|\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right|^2\right\rangle \tag{8.15}$$

有关系

$$\frac{1}{2}\rho\left\langle\mathbf{v}\left|\mathbf{v}-\mathbf{u}\right|^2\right\rangle=\frac{1}{2}\rho\left\langle\left(\mathbf{v}-\mathbf{u}\right)\left|\mathbf{v}-\mathbf{u}\right|^2\right\rangle+\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}\left\langle\left|\mathbf{v}-\mathbf{u}\right|^2\right\rangle=\mathbf{J}_Q+\rho e_{\text{int}}\mathbf{u} \tag{8.16}$$

由上式和式(8.11)，式(8.13)可以变换为

$$\frac{\partial\left(\rho e_{\text{int}}\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\mathbf{J}_Q+\rho e_{\text{int}}\mathbf{u}\right)=-\underline{P}:\nabla\mathbf{u} \tag{8.17}$$

内能也不是守恒量，具有源 $-\underline{P}:\nabla\mathbf{u}$。内能流由传导流 $\mathbf{J}_Q$ 和对流流 $\rho e_{\text{int}}\mathbf{u}$ 组成。考虑式(8.7)，可以把上式写成等价形式：

$$\frac{\mathrm{d}e_{\text{int}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}_Q}{\rho}=-\frac{1}{\rho}\underline{P}:\nabla\mathbf{u} \tag{8.18}$$

其中物质导数或者流体动力学导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla$。

质量、动量和内能的局域均衡方程都是严格的，但是缺乏玻尔兹曼方程的解时并没有实际的作用。因此需要使用 Chapman-Enskog 展开求出玻尔兹曼方程的解 $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ 并且代入局域均衡方程，从而得到流体动力学方程。

8.2. Chapman-Enskog 展开

该方法的目的是用系统的展开步骤得到具有如下形式的玻尔兹曼方程的正规解：

$$f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\mathscr{F}\left[n(\mathbf{r},t),\mathbf{u}(\mathbf{r},t),T(\mathbf{r},t),\mathbf{p}\right] \tag{8.19}$$

依赖于上述分布计算得到的任何 $\mathbf{p}$ 的函数的均值由局域热力学变量所决定。流和局域热力学变量之间的关系构成现象性的输运定理，也叫做**本构方程**（constitutive equations）。

局域粒子密度、局域平均速度和局域温度用单粒子分布函数表示为

$$\begin{cases} n(\mathbf{r},t)=\int f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\mathrm{d}\mathbf{p} \\ \mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\dfrac{1}{n(\mathbf{r},t)}\int f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{p} \\ k_{\mathrm{B}}T(\mathbf{r},t)=\dfrac{1}{n(\mathbf{r},t)}\int f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\dfrac{m}{3}\left|\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right|^2\mathrm{d}\mathbf{p} \end{cases} \tag{8.20}$$

将单粒子分布函数逐级展开：

$$f=\frac{1}{\xi}\left(f^{(0)}+\xi f^{(1)}+\xi^2 f^{(2)}+\cdots\right),\quad f^{(1)}\ll f^{(0)},\quad f^{(2)}\ll f^{(1)},\cdots \tag{8.21}$$

其中参数ξ只是数学上辅助进行展开，没有实际的物理意义，计算后期将设置为 1。

对于零级近似 $f\simeq f^{(0)}$，要求

$$\begin{cases}\int f^{(1)}\mathrm{d}\mathbf{p}=0\\ \int f^{(1)}\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{p}=0\\ \int f^{(1)}\mathbf{v}^2\mathrm{d}\mathbf{p}=0\end{cases} \tag{8.22}$$

从而由式(8.20)可知 $f^{(0)}$是局域平衡的麦克斯韦一玻尔兹曼分布：

$$f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=n(\mathbf{r},t)\left(2\pi mk_{\mathrm{B}}T(\mathbf{r},t)\right)^{-3/2}\exp\left(-\frac{\left|\mathbf{p}-m\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right|^2}{2mk_{\mathrm{B}}T(\mathbf{r},t)}\right) \tag{8.23}$$

定义泛函

$$\mathscr{I}(f\mid g)=\int\mathrm{d}\mathbf{p}_1\int\mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)\left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_1\right|\left(f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t)g(\mathbf{r},\mathbf{p}_1',t)-f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)g(\mathbf{r},\mathbf{p}_1,t)\right) \tag{8.24}$$

则玻尔兹曼方程中的碰撞项

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}=\mathscr{I}(f\mid f) \tag{8.25}$$

从而把玻尔兹曼方程写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}+\cdots\right)\left(f^{(0)}+\xi f^{(1)}+\cdots\right)+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}+\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\right)\frac{1}{\xi}\left(f^{(0)}+\xi f^{(1)}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{\xi^2}\mathscr{I}\left(f^{(0)}\mid f^{(0)}\right)+\frac{1}{\xi}\left(\mathscr{I}\left(f^{(0)}\mid f^{(1)}\right)+\mathscr{I}\left(f^{(1)}\mid f^{(0)}\right)\right)+\cdots\end{aligned} \tag{8.26}$$

其中$\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}$是对$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}$加上约束条件式(8.22)的零级近似。

比较式(8.26)两边的最低级（系数$\frac{1}{\xi^2}$）的表达式可得

$$\mathscr{I}\left(f^{(0)}\mid f^{(0)}\right)=0 \tag{8.27}$$

上式再次说明 $f^{(0)}$是局域平衡分布。次低级（系数$\frac{1}{\xi}$）的表达式给出

$$\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}f^{(0)}+\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f^{(0)}+\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}f^{(0)}=\mathscr{I}\left(f^{(0)}\mid f^{(1)}\right)+\mathscr{I}\left(f^{(1)}\mid f^{(0)}\right) \tag{8.28}$$

上式可以用来确定 $f^{(1)}$的解。即使只展开到一级，如果用玻尔兹曼方程的精确形式代入求解，计算依然很繁杂。采用弛豫时间近似将会使求解变得简便许多。

8.3. 零级近似

以下求零级近似的压强、热流和流体动力学方程。令 $C \equiv n(\mathbf{r},t)\left(2\pi m k_{\mathrm{B}} T(\mathbf{r},t)\right)^{-\frac{3}{2}}$，$A \equiv \dfrac{m}{2k_{\mathrm{B}} T(\mathbf{r},t)}$，则零级解式(8.23)简写成

$$f^{(0)} = C\exp\left(-A|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2\right) \tag{8.29}$$

根据压强张量元的定义式(8.11)，有

$$P_{ij}^{(0)} = \frac{\rho}{n} C\int (v_i - u_i)(v_j - u_j)\exp\left(-A|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2\right)\mathrm{d}\mathbf{p} \tag{8.30}$$

转换到流体坐标系中，粒子速度为 $\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = \mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r},t)$，则

$$P_{ij}^{(0)} = m^4 C\int U_i U_j \exp\left(-AU^2\right)\mathrm{d}\mathbf{U} \tag{8.31}$$

由高斯分布的偶对称性，非对角元都为零。对角元等于流体静力学压强

$$P(\mathbf{r},t) = n(\mathbf{r},t) k_{\mathrm{B}} T(\mathbf{r},t) \tag{8.32}$$

因此零级近似的压强张量元可以统一写成

$$P_{ij}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \delta_{ij} P(\mathbf{r},t) \tag{8.33}$$

根据热流的定义式(8.15)，零级热流为

$$\mathbf{J}_Q^{(0)} = \frac{1}{2} m^4 C\int \mathbf{U} U^2 \exp\left(-AU^2\right)\mathrm{d}\mathbf{U} = 0 \tag{8.34}$$

即零级近似下没有热流。所以零级近似下没有耗散现象，气体行为是理想流体。

由 $\underline{P}^{(0)}$， $\mathbf{J}_Q^{(0)}$ 以及状态方程 $\dfrac{P}{\rho} = \dfrac{2}{3} e_{\mathrm{int}}$，得到理想流体动量的局域均衡方程为**欧拉方程**：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} = \frac{1}{m}\mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla P \tag{8.35}$$

理想流体内能的局域均衡方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)e_{\mathrm{int}} + \frac{2}{3} e_{\mathrm{int}} \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{8.36}$$

等价于局域温度的方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)T + \frac{2}{3} T\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{8.37}$$

连续性方程式(8.7)，欧拉方程式(8.35)和内能局域均衡方程式(8.36)（或者式(8.37)）构成了理想流体的流体动力学方程。

8.3. 一级近似

由弛豫时间近似，把玻尔兹曼方程近似写成

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f+\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}f=-\frac{f-f^{(0)}}{\tau(\mathbf{v})} \tag{8.38}$$

根据 Chapman-Enskog 展开，可以把上式近似为

$$f^{(1)}\simeq-\tau(\mathbf{v})\left(\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}+\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\right)f^{(0)} \tag{8.39}$$

零级近似解式(8.23)可以写成形式

$$f^{(0)}=\frac{\rho}{m}\left(2\pi mk_{\mathrm{B}}T\right)^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{mU^2}{2k_{\mathrm{B}}T}\right) \tag{8.40}$$

有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial\rho}=\dfrac{f^{(0)}}{\rho}\\ \dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial T}=\dfrac{1}{T}\left(\dfrac{mU^2}{2k_{\mathrm{B}}T}-\dfrac{3}{2}\right)f^{(0)}\\ \dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial U_i}=\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial v_i}=-\dfrac{mU_i}{k_{\mathrm{B}}T}f^{(0)}\end{cases} \tag{8.41}$$

代入式(8.39)可得

$$f^{(1)}=-\tau(\mathbf{v})f^{(0)}\left(\frac{1}{\rho}D^{(0)}(\rho)+\frac{1}{T}\left(\frac{m}{2k_{\mathrm{B}}T}U^2-\frac{3}{2}\right)D^{(0)}(T)+\frac{m}{k_{\mathrm{B}}T}U_jD^{(0)}(u_j)-\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}\right)$$

(8.42)

其中 $D^{(0)}(X)=\left(\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)X$ 。由零级近似的理想流体动力学方程式(8.7)，(8.35)和(8.36)可以求得

$$\begin{cases}D^{(0)}(\rho)=-\rho\nabla\cdot\mathbf{u}+\mathbf{U}\cdot\nabla\rho\\ D^{(0)}(u_j)=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_j}+\dfrac{F_j}{m}+\mathbf{U}\cdot\nabla u_j\\ D^{(0)}(T)=-\dfrac{2}{3}T\nabla\cdot\mathbf{u}+\mathbf{U}\cdot\nabla T\end{cases} \tag{8.43}$$

上式代入式(8.42)，得到

$$f^{(1)}=-\tau(\mathbf{v})f^{(0)}\left(\frac{1}{T}(\mathbf{U}\cdot\nabla T)\left(\frac{m}{2k_{\mathrm{B}}T}U^2-\frac{5}{2}\right)+\frac{m}{k_{\mathrm{B}}T}U_iU_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{mU^2}{3k_{\mathrm{B}}T}(\nabla\cdot\mathbf{u})\right) \tag{8.44}$$

定义对称张量 $\underline{\Lambda}$ 的张量元

$$\Lambda_{ij}=\frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{8.45}$$

从而把式(8.44)表示成

$$f^{(1)}=-\tau(\mathbf{v})f^{(0)}\left(\frac{1}{T}(\mathbf{U}\cdot\nabla T)\left(\frac{m}{2k_{\mathrm{B}}T}U^2-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\Lambda_{ij}\left(U_iU_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}U^2\right)\right) \tag{8.46}$$

上式中既没有外力也没有密度梯度，说明在一级近似下没有粒子扩散流存在，与约束条件式(8.22)一致。

一级近似下，压强张量元

$$P_{ij}=m\int(v_i-u_i)(v_j-u_j)\left(f^{(0)}+f^{(1)}\right)\mathrm{d}\mathbf{p}=nk_{\mathrm{B}}T\delta_{ij}+P_{ij}^{(1)} \tag{8.47}$$

把式(8.46)代入上式，可以求得

$$P_{ij}^{(1)}=-\frac{\tau m^4}{k_{\mathrm{B}}T}\Lambda_{kl}\int U_iU_j\left(U_kU_l-\frac{1}{3}\delta_{kl}U^2\right)f^{(0)}\mathrm{d}\mathbf{U} \tag{8.48}$$

它是迹 $\sum_{i=1}^{3}P_{ii}^{(1)}=0$ 的对称张量，线性依赖于对称张量 $\underline{\Lambda}$，因此应该具有形式

$$P_{ij}^{(1)}=-\frac{2\eta}{m}\left(\Lambda_{ij}-\frac{m}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{u}\right) \tag{8.49}$$

这一本构方程中，$m\nabla\cdot\mathbf{u}$ 是张量 $\underline{\Lambda}$ 的迹，η 是粘滞系数。通过计算高斯积分得到

$$\eta=nk_{\mathrm{B}}T\tau \tag{8.50}$$

所以一级近似下的压强张量

$$P_{ij}=\delta_{ij}P-\frac{2\eta}{m}\left(\Lambda_{ij}-\frac{m}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)=\delta_{ij}P-\eta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) \tag{8.51}$$

具有粒子扩散的贡献。

由式(8.46)可以计算得到一级近似下的热流

$$\mathbf{J}_Q^{(1)}=-\frac{\tau m^4}{2}\int\mathbf{U}U^2\left(\frac{m}{2k_{\mathrm{B}}T}U^2-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{T}U_i\frac{\partial T}{\partial x_i}f^{(0)}\mathrm{d}\mathbf{U} \tag{8.52}$$

由热流的定义 $\mathbf{J}=-\kappa\nabla T$ 可以解得

$$\kappa = \frac{5}{2}\frac{nk_B^2 T\tau}{m} \tag{8.53}$$

把一级近似的压强表达式(8.51)代入动量的局域均衡方程式(8.12)，得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{u} + \frac{\eta}{3\rho}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) \tag{8.54}$$

对于不可压缩流体$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$，上式成为 **Navier-Stokes 方程**：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{u} \tag{8.55}$$

把一级近似的压强表达式(8.51)和热流表达式(8.52)代入内能的局域均衡方程式(8.18)，得到

$$\rho c_v\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)T + \frac{2}{3}T(\nabla\cdot\mathbf{u})\right) = \nabla\cdot(\kappa\nabla T) + \frac{\eta}{2}\left(\frac{2\Lambda_{ij}}{m} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)^2 \tag{8.56}$$

其中等容热容$c_v = \frac{3}{2}\frac{k_B}{m}$。当局域平均速率远小于声速且$\kappa$与空间位置无关时，上式简化成

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\nabla^2 T = 0 \tag{8.57}$$

这是一个对于液体和固体都成立的为实验所证实的**热方程**（heat equation）。根据热方程可以定义**热扩散系数**

$$D_{th} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \tag{8.58}$$

从而热方程也可以写成

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th}\nabla^2 T \tag{8.59}$$