

习题一：从特性函数到物态方程

一根橡皮带的状态方程是 $S = L_0 \gamma (\frac{\theta E}{L_0})^{1/2} - L_0 \gamma [\frac{1}{2} (\frac{L}{L_0})^2 + \frac{L_0}{L} - \frac{3}{2}]$ 或者 $S = L_0 \gamma \exp(\theta n E / L_0) - L_0 \gamma [\frac{1}{2} (\frac{L}{L_0})^2 + \frac{L_0}{L} - \frac{3}{2}]$, 可以认为 $L_0 = n l_0$ 是橡皮带的静态长度, 其中 n 是分子的物质的量, γ, l_0, θ 都是常数 (l_0 可理解为摩尔长度), L 是橡皮带的当前长度, S 和 E 分别是熵和能量。试据此回答以下三个问题:

1. 上面的两个方程哪个可能是对的? 为什么?
2. 从微分形式的热力学第一定律出发, 证明张力 f 满足: $-f/T = (\frac{\partial S}{\partial L})_{E,n}$, 进而由此给出 f 对 T 和 L/n 的依赖关系
3. 假设有两条满足此状态方程 (即第一问你认为正确的那个) 的橡皮带, 两块的温度、摩尔长度、物质的量分别为 $(T^{(1)}, l^{(1)}, n^{(1)})$ 和 $(T^{(2)}, l^{(2)}, n^{(2)})$, 如果它们保持在恒定长度, 且彼此热接触, 试确定这两块橡皮带最后的能量和温度 (作为这些初始热力学量的函数) (忽略与环境的热对流和质量流)

习题二：绝热过程与绝热指数

表征理想气体绝热过程的 $P-V$ 关系是由指数 γ 来控制的, 即 $PV^\gamma = \text{Const}$, 考虑物质的量为 n_1, n_2 的两种理想气体, 指数各自为 γ_1, γ_2 组成的混合气体, 试证明这种混合气体的指数由下式给出: $(\gamma - 1)^{-1} = f_1(\gamma_1 - 1)^{-1} + f_2(\gamma_2 - 1)^{-1}$, 这里 $f_i \equiv n_i / (n_1 + n_2)$

习题三到六

《热力学·统计物理 (第五版)》(汪志诚): 1.6, 1.21, 1.22, 2.21

习题七：唯象确立物态方程

1. 考虑一种气体, $\alpha = \beta = \frac{1}{T}$, $\kappa_T = \frac{1}{P}$, 试求其物态方程 (你会发现这正是理想气体)
2. 考虑一种更复杂的情形: 对于摩尔数为 n 的某种气体, $\alpha = \frac{nR}{PV}$, $\kappa_T = \frac{1}{P} + \frac{a}{V}$, 其中所有字母含义如常规情形, a 是某一常数, 求这种气体的物态方程

习题八：偏导关系

试结合多元函数偏导相关的数学定理、麦克斯韦关系等, 计算证明以下关系式:

1. $(\frac{\partial E}{\partial T})_P = C_p - P(\frac{\partial V}{\partial T})_P$, $(\frac{\partial H}{\partial T})_V = C_V + V(\frac{\partial P}{\partial T})_V$
2. 考虑一个定压、恒温系统, 它的热力学平衡应当由 $G \equiv E + PV - TS$ 取最小值给出, 现在以 V 和 S 为自变量考虑 G 的一个小偏离, 依据“任何小的偏离会使此吉布斯自由能增大”证明: 稳定热力学平衡需要 $C_v > 0$
3. 绝热过程中, 物体的温度、体积和压强之间的关系由熵不变的情况下所取的各种导数确定。试证明: $(\frac{\partial T}{\partial V})_S = -\frac{T}{C_v}(\frac{\partial S}{\partial V})_T$
4. 定义绝热压缩率 $(\frac{\partial V}{\partial P})_S$, 试证明它等于 $\frac{C_v}{C_p}(\frac{\partial V}{\partial P})_T$, 注意这里后者的第二项正是等温压缩率 (这里绝热压缩率和等温压缩率皆没有使用 $1/V$ 进行约化), 因此绝热压缩率按绝对值总是小于等温压缩率

习题九：概率论

假设天空中的星星是随机分布的 (符合泊松分布), 并且密度是 n , 那么最近邻的两颗星间距为 R 的概率是多少?

附注书习题

1.6 一理想弹性丝的物态方程为

$$\mathcal{F} = bT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right)$$

其中 L 是长度, L_0 是张力 $\mathcal{F}$ 为零时的 L 值, 它只是温度 T 的函数, b 是常数. 试证明:

(a) 等温弹性模量为

$$E = \frac{bT}{A} \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2} \right)$$

在张力为零时, $E_0 = \frac{3bT}{A}$. 其中 A 是弹性线的截面面积.

(b) 线胀系数

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{1}{T} \frac{L^3/L_0^3 - 1}{L^3/L_0^3 + 2}$$

其中 $\alpha_0 = \frac{1}{L_0} \frac{dL_0}{dT}$.

1.21 物体的初温 T_1 高于热源的温度 T_2 , 有一热机在此物体与热源之间工作, 直到将物体的温度降低到 T_2 为止. 若热机从物体吸取的热量为 Q , 试根据熵增加原理证明, 此热机所能输出的最大功为

$$W_{\max} = Q - T_2 (S_1 - S_2)$$

其中 $S_1 - S_2$ 是物体的熵减少量.

1.22 有两个相同的物体, 热容为常量, 初始温度同为 T_1 . 今令一制冷机在此两物体间工作, 使其中一个物体的温度降低到 T_2 为止. 假设物体维持在定压下, 并且不发生相变. 试根据熵增加原理证明, 此过程所需的最小功为

$$W_{\min} = C_p \left(\frac{T_1^2}{T_2} + T_2 - 2T_1 \right)$$

2.21 已知超导体的磁感应强度 $B = \mu_0 (H + M) = 0$, 求证:

(a) C_M 与 M 无关, 只是 T 的函数, 其中 C_M 是在磁化强度 M 保持不变时的热容.

(b) $U = \int C_M dT - \frac{\mu_0 M^2}{2} + U_0$

(c) $S = \int \frac{C_M}{T} dT + S_0$