



十三、玻色子的统计性质

1、光子气体

黑体辐射的统计物理理论。

2、固体的热容

- 经典统计理论：每个原子在各自的平衡位置附近做微小的简谐振动。
- 爱因斯坦的量子理论：单频振子的能量取量子化值。
- 德拜理论：把固体看成传播弹性波的连续介质。



3、玻色—爱因斯坦凝聚

- **玻色—爱因斯坦凝聚：** 由于玻色粒子的全同性（不可分辨），当大量玻色粒子处于相同的量子态时，呈现出有效的统计吸引，导致玻色—爱因斯坦凝聚现象。
- **自由理想玻色气体：** 在动量空间出现凝聚，位置空间完全均匀分布，凝聚部分具有一级相变的特征。
- **自由非理想玻色气体：** 粒子间的空间排斥作用导致了动量空间的吸引，不再具备一级相变的特征。
- **简谐势阱中理想玻色气体：** 动量和位置空间都出现凝聚。

4、超流

- Tisza 二流体模型。
- 朗道超流理论。



自由理想玻色气体

自由理想玻色气体状态方程为

$$\begin{cases} \frac{P}{k_B T} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \ln(1-z) \\ \frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \end{cases}$$

$P=0$ 态的平均粒子数为 $\langle n_0 \rangle = \frac{z}{1-z}$

因为必须有 $\langle n_0 \rangle \geq 0$ 所以 $0 \leq z \leq 1$ $g_{3/2}(z) \leq g_{3/2}(1) = 2.612 \dots$

分割面方程 $\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(1)$ 把相空间分成凝聚区和非凝聚区

产生凝聚 ($\langle n_0 \rangle > 0$) 的条件是: (a) v 一定时 $T < T_c$

(b) T 一定时 $v < v_c$ $T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m (v g_{3/2}(1))^{2/3}}$ $v_c = \frac{\lambda^3}{g_{3/2}(1)}$

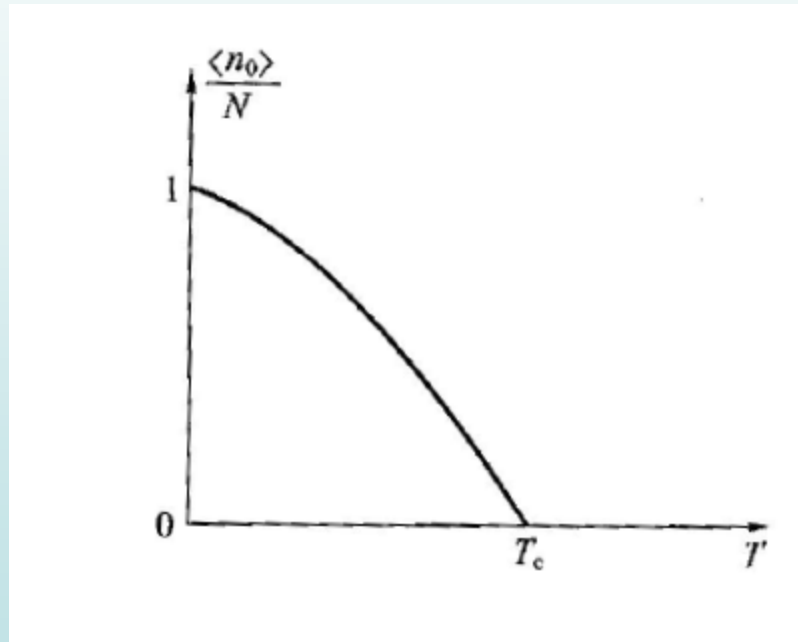


填布数

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \begin{cases} 0 & \frac{\lambda^3}{v} \leq g_{3/2} \\ 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} = 1 - \frac{v}{v_c} & \frac{\lambda^3}{v} \geq g_{3/2} \end{cases}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \leq g_{3/2} \quad (1)$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \geq g_{3/2} \quad (1)$$



玻色粒子间的“统计吸引”引起的粒子在动量空间的凝聚，并非粒子间相互作用导致的坐标空间的凝聚。



$V \rightarrow \infty$ 时, 状态方程变成

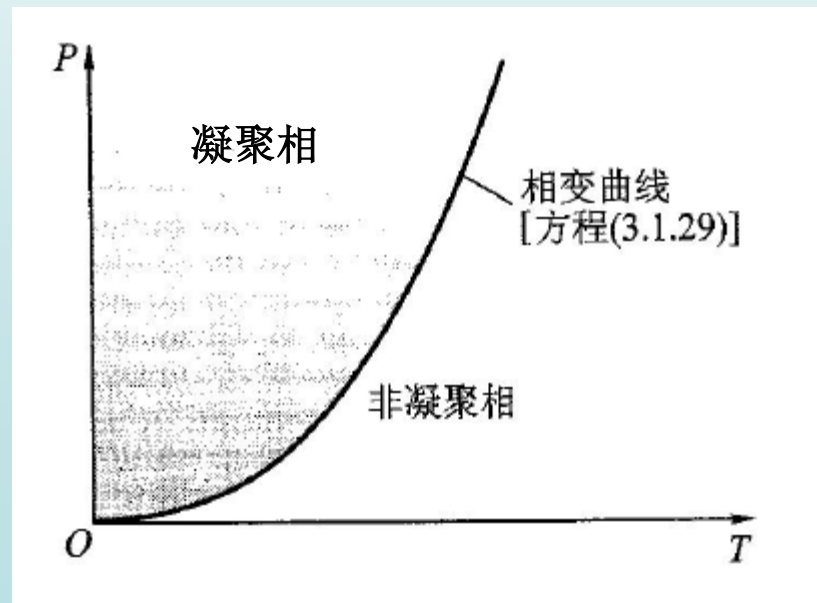
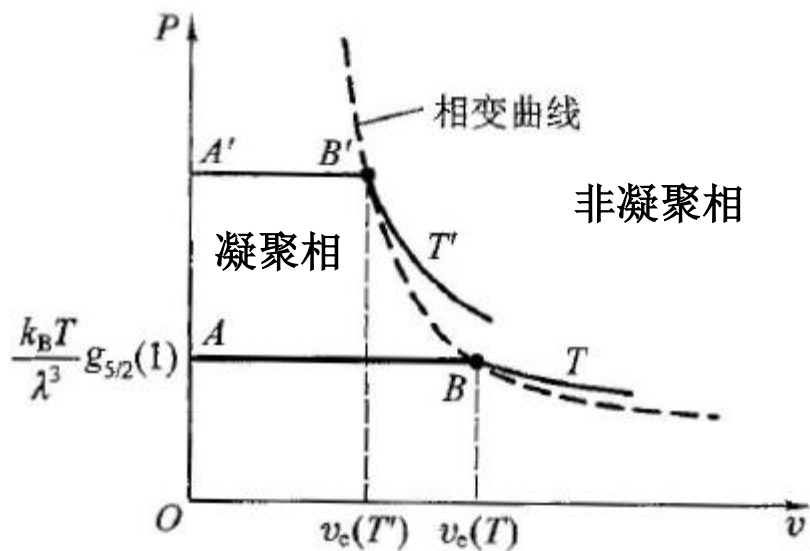
$$\frac{P}{k_B T} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) & v > v_c, \text{ 非凝聚区} \\ \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1) & v < v_c, \text{ 凝聚区} \end{cases}$$

P - v 图相变曲线

$$P v^{5/3} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{g_{5/2}(1)}{(g_{3/2}(1))^{5/3}}$$

P - T 图相变曲线

$$P = \frac{k_B T}{v_c g_{3/2}(1)} g_{5/2}(1) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g_{5/2}(1) (k_B T)^{5/2}$$





克拉珀龙方程 $\frac{dP}{dT} = \frac{1}{Tv_c} \left(\frac{5}{2} k_B T \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \right)$ 对应的潜热 $L = \frac{5}{2} k_B T \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} > 0$

呈现一级相变的特征

内能 $\frac{U}{N} = \frac{3}{2} P v = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{k_B T v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) & v > v_c \text{ 或 } T > T_c \\ \frac{3}{2} \frac{k_B T v}{\lambda^3} g_{5/2}(1) & v < v_c \text{ 或 } T < T_c \end{cases}$

定容比热 $\frac{C_V}{NK_B} = \begin{cases} \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} & v > v_c \text{ 或 } T > T_c \\ \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1) & v < v_c \text{ 或 } T < T_c \end{cases}$

熵 $\frac{S}{NK_B} = \begin{cases} \frac{5}{2} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \ln z & v > v_c \text{ 或 } T > T_c \\ \frac{5}{2} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1) & v < v_c \text{ 或 } T < T_c \end{cases}$



自由非理想玻色气体（排斥势）

用量子微扰论求解薛定谔方程 $\hat{H} = -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$

一级近似下 $E_n = (\Phi_n, \hat{H} \Phi_n) = \sum_p \frac{p^2}{2m} n_p + \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \left(\Phi_n, \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \Phi_n \right)$

给定条件 $\frac{a}{v^{1/3}} \ll 1$ 和 $ka \ll 1$ 有 $E_n = \sum_p \frac{p^2}{2m} n_p + \frac{4\pi a \hbar^2}{mV} \left(N^2 - \frac{1}{2} \sum_p n_p^2 \right)$

基态（所有粒子动量为零） $\frac{E_0}{N} = \frac{4\pi a \hbar^2}{mVN} \left(n_0^2 - \frac{1}{2} n_0^2 \right) = \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 2\pi a \rho$

低激发态 $\frac{E_n}{N} \approx \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 4\pi a \rho \left[1 - \frac{1}{2} \sum_p \left(\frac{n_p}{N} \right)^2 \right]$ 所有激发粒子具有同样的动量时能量最小

粒子间的空间排斥作用（ $a > 0$ ）导致了动量空间的吸引



极少数处于
激发态时

$$E_n \approx \varepsilon_n + \frac{N}{\beta} \left(\frac{a\lambda^2}{v} \right) (2 - \xi^2)$$

$$\varepsilon_n = \sum_p \frac{p^2}{2m} n_p \quad \xi \equiv \frac{n_0}{N}$$

配分函数 $Z_N = \sum_n \exp(-\beta \varepsilon_n) \exp \left(-N \left(\frac{a\lambda^2}{v} \right) (2 - \xi^2) \right) = Z_N^0 \left\langle \exp \left(-N \left(\frac{a\lambda^2}{v} \right) (2 - \xi^2) \right) \right\rangle_0$

自由能 $\frac{F}{N} \approx \frac{F^0}{N} + \frac{4\pi a \hbar^2}{mv} \left(1 - \frac{1}{2} \langle \xi^2 \rangle_0 \right)$

压强 $P = - \left. \frac{\partial F}{\partial v} \right|_{T,N} = P^0 + \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \left(\frac{1}{v^2} \left(1 - \frac{1}{2} \langle \xi \rangle_0^2 \right) + \frac{1}{v} \langle \xi \rangle_0 \frac{\partial \langle \xi \rangle_0}{\partial v} \right)$

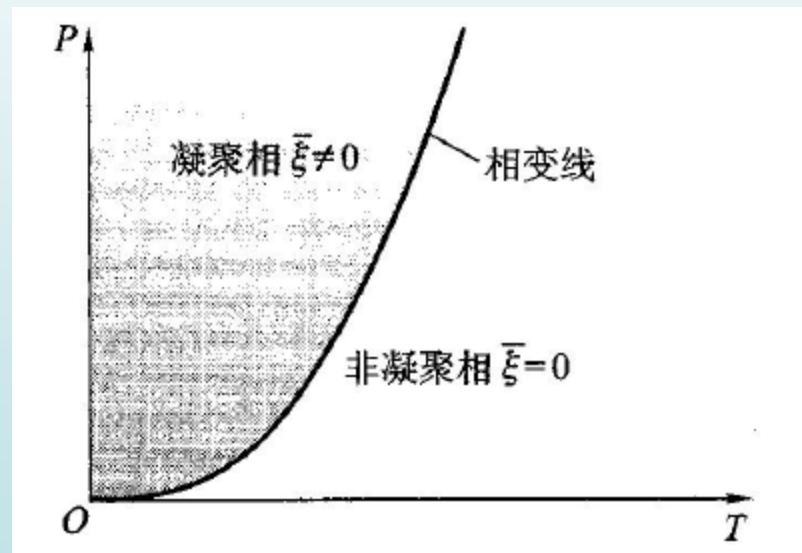
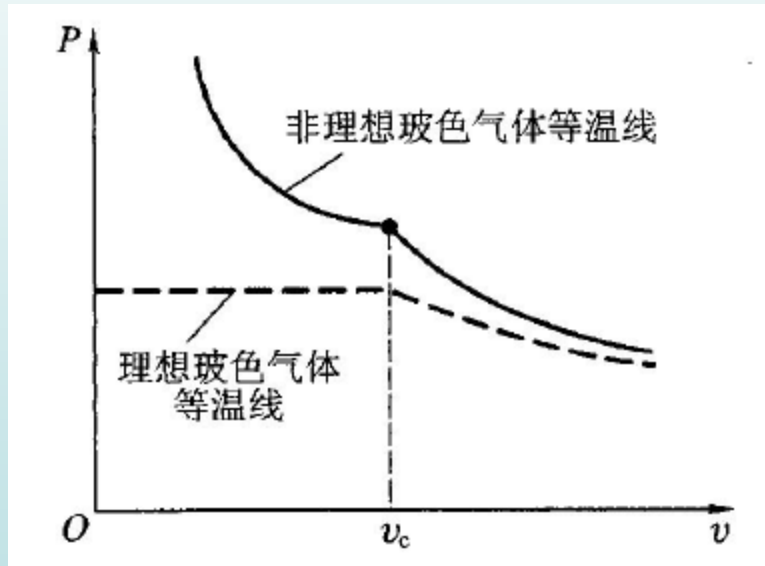
代入理想玻色气体的关系

$$\langle \xi \rangle_0 = \frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \begin{cases} 0 \\ 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} = 1 - \frac{v}{v_c} \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{\lambda^3}{v} &\leq g_{3/2} \quad (1) \\ \frac{\lambda^3}{v} &\geq g_{3/2} \quad (1) \end{aligned}$$



得到近似状态方程

$$P = \begin{cases} P^0 + \frac{4\pi a \hbar^2}{m v^2} & v > v_c, T > T_c \\ P^0 + \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v_c^2} \right) & v > v_c, T > T_c \end{cases}$$



略去 $\frac{a}{\lambda}$ 和 $\frac{a\lambda^2}{v}$ 的高阶项后，排斥势的非理想玻色气体呈现二级相变的特征



简谐势阱中理想玻色气体

简谐势阱
$$V_h(x, y, z) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

单体能量本征值
$$\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z$$

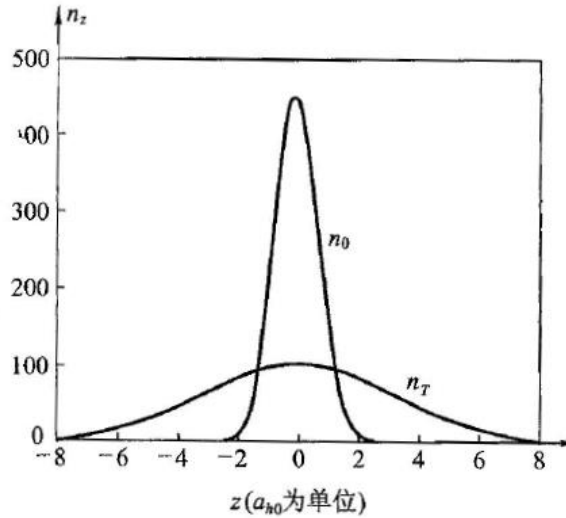
基态波函数
$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_i \varphi_0(\mathbf{r}_i) \quad \varphi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right)$$

$$\varphi_p = \int \varphi_0(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} / \hbar) d\mathbf{r}$$

傅里叶变换
$$= \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega_x}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2\hbar m\omega_x}\right) \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega_y}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{p_y^2}{2\hbar m\omega_y}\right) \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega_z}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{p_z^2}{2\hbar m\omega_z}\right)$$

当 $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$ 时
$$\varphi_p = 2\sqrt{2} \left(\frac{\pi\hbar}{m}\right)^{3/4} \omega^{-5/4} \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}\right)$$

基态位置空间和动量空间都呈高斯分布



$T < T_c$ 时, 发生凝聚的粒子数
$$N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right)$$

其中相变温度
$$T_c = 0.94 \frac{\hbar \omega_0}{k_B} N^{1/3} \quad \omega_0 = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$$

完全不同于自由理想玻色气体的
$$\sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$



由变分原理，得到不含时格罗斯—皮达也夫斯基（GP）方程

$$\frac{\delta K_0}{\delta \Phi^*} = \int d^3r \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_h - \mu \right] \Phi(r) + \int d^3r |\Phi(r)|^2 \Phi(r) = 0$$
$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_h + U_0 |\Phi(r)|^2 \right] \Phi(r) = \mu \Phi(r)$$

其中 $\mu = \frac{\partial E_0(N)}{\partial N} + O\left(\frac{1}{N}\right)$ 是增加一个粒子引起基态能量的增量

(1) 排斥情形 $a > 0$ 数值解表明与理想玻色气体相比，凝聚体的波函数变宽，形状明显偏离高斯分布。

(2) 吸引情形 $a < 0$ 考虑各向同性简谐势 $V_h = \frac{m}{2} \omega^2 r^2$

$$E_0[\Phi(\mathbf{r})] = \int d^3r \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Phi(r)|^2 + \frac{m}{2} \omega^2 r^2 |\Phi(r)|^2 + \frac{2\pi \hbar^2 a}{m} |\Phi(r)|^4 \right)$$



给定高斯型猜测解
$$\Phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{N_0}{d^3 \pi^{3/2}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2d^2} \right)$$

得到
$$E_0(d) = \frac{3\hbar^2 N_0}{4md^2} + \frac{3}{4} N_0 m \omega^2 d^2 + \frac{\hbar^2 a N_0^2}{\sqrt{2\pi} m d^3}$$

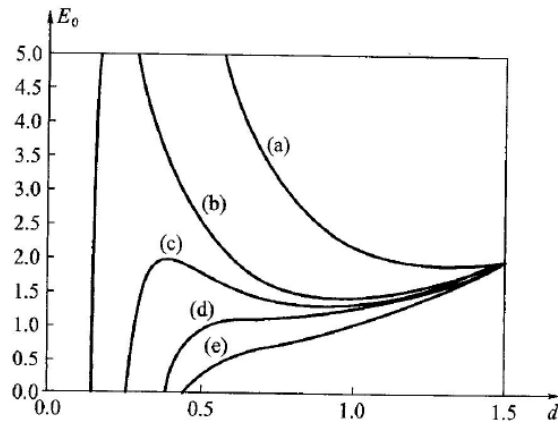


图 3.5.3 纵轴为每个粒子的能量(以 $\hbar\omega$ 为单位): (a) 代表理想气体;
(b) $N_0 = 600$; (c) $N_0 = 1000$; (d) $N_0 = 1450$; (e) $N_0 = 2000$
($a = -27.3a_0$, a_0 为玻尔半径, $\omega = 2\pi \times 160$ Hz)

稳定的局部极小值只能在粒子数小于某个临界值时才可以出现, 此时零点能可以阻止粒子彼此靠近, 形成玻色—爱因斯坦凝聚; 当粒子数大于临界值时, 不存在能量极小, 过大的吸引力导致凝聚体不再稳定。



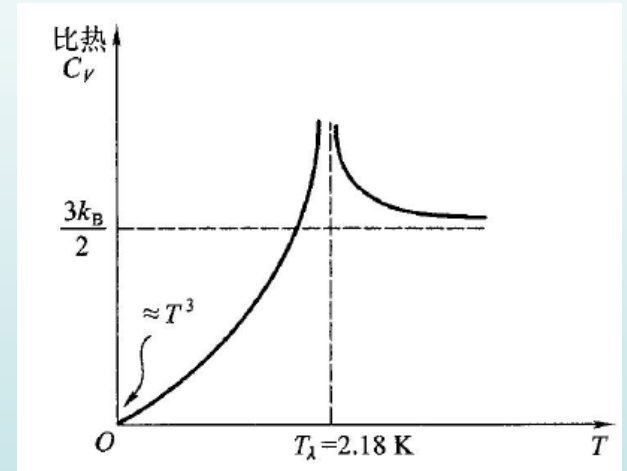
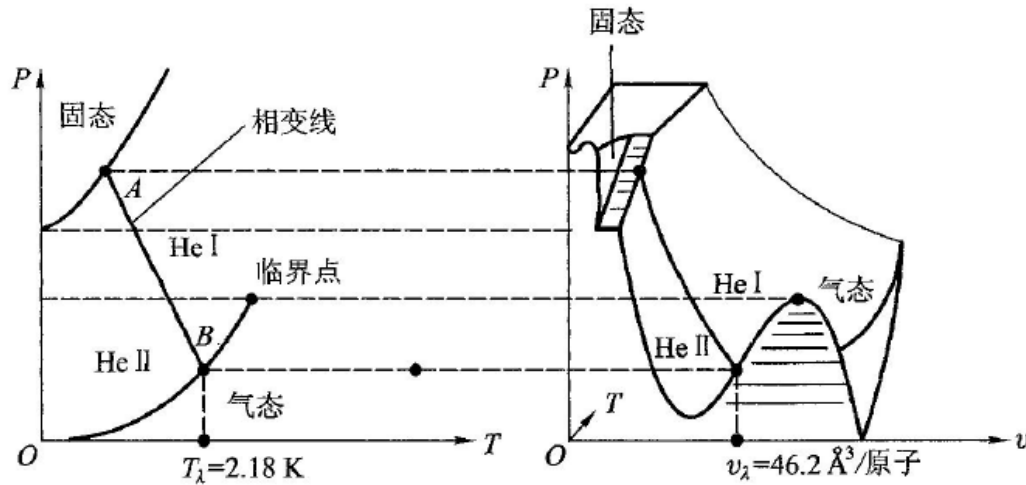
超流相变与朗道超流理论

- **超流相变：**在接近绝对零度时， He^4 及其同位素 He^3 可以保持液态，这是因为氦原子的小质量导致的大零点能可以克服原子间的弱相互作用，从而使原子不被固定在晶格位置上。 He^4 的正常相He I和超流相He II之间的转变为二级相变，相变温度为 2.18 K。而 He^3 作为费米子能够成对，从而产生超流相变，相变温度大约为 10^{-3} K。
- **Tisza经验二流体模型：**假定He II由两部分组成：一部分是具有粘滞性和熵的正常流体，另一部分是粘滞系数为零和熵为零的超流体。
- **朗道超流理论：**在低温弱激发条件下，可以利用二次量子化方法（元激发方法）把有相互作用粒子系统的哈密顿量变成没有相互作用的准粒子组成系统的哈密顿量。
- **声子型激发的微观机制：**应用博戈留波夫变换对哈密顿量进行对角化，得到形式上无相互作用的虚拟子。
- **理论与实验结合的元激发谱推导：**基于实验测得的液体结构因子得到完整的能谱（声子谱和旋子谱）。



He⁴ 超流相变

氦原子的小质量导致的大零点能克服原子间的弱相互作用。



He I: 正常液相; He II: 超流相

λ 相变 (二级相变)



Tisza 经验二流体模型

假定He II由两部分组成：一部分是具有粘滞性和熵的正常流体，另一部分是粘滞系数为零和熵为零的超流体。

质量密度： $\rho = \rho_n + \rho_s$

速度场： $\rho \mathbf{v} = \rho_n \mathbf{v}_s + \rho_s \mathbf{v}_s$

可以定性解释如下实验现象：

(1) **机械热效应**：在两个容器间建立压差，则超流体部分由一个容器流向另一个容器。因为超流体不具有熵，因此失去超流体的容器因为单位质量的熵增加而变热，获得超流体的容器因为熵减少而变冷。反之有热机械效应。

$$\Delta P = \frac{s}{v} \Delta T = \rho s \Delta T$$

(2) 泡在He II中的旋转圆盘实验可以测得正常部分的密度比和温度的关系：

$$\frac{\rho_n}{\rho} = \begin{cases} \left(\frac{T}{T_\lambda} \right)^{5.6} & T < T_\lambda \\ 1 & T > T_\lambda \end{cases}$$

(3) 存在两种独立的振动波：(a) 普通的声波，速度场方向一致，密度同相振动，总密度振动；(b) 熵波：速度场方向相反，密度相位相反，总密度保持不变，熵密度呈现振动。

(4) 存在远距离的小尺度涡旋线。



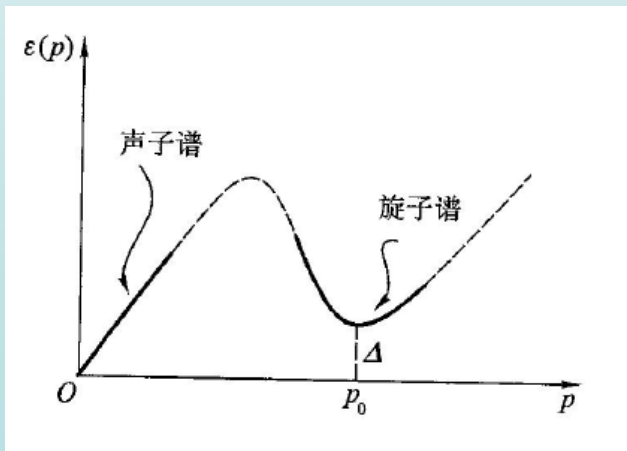
朗道超流理论

朗道超流理论提供了在绝对零度附近二流体模型的具体结构图像。在低温弱激发条件下，可以利用二次量子化方法（元激发方法）把有相互作用粒子系统的哈密顿量变成没有相互作用的**准粒子**组成系统的哈密顿量。对于He II，朗道认为在 $T=0$ K时处于基态，全部是超流成分；当温度略高时，系统产生弱激发，在完全超流背景下出现了准粒子，此时系统能量 $U = U_0 + \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p}) n(\mathbf{p})$ 动量 $\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} n(\mathbf{p})$

朗道进一步假设在He II中存在两种不同的玻色型准粒子：声子和旋子，能谱分别为

$$\varepsilon_s(p) = v_s p$$

$$\varepsilon_x(p) = \varepsilon_0 + \frac{(p - p_0)^2}{2m_x}$$



$$\text{激发谱写为 } \hbar\omega_k = \begin{cases} v_s \hbar k & k \ll k_0 \\ \varepsilon_0 + \frac{\hbar^2 (k^2 - k_0^2)}{2m_x} & k \approx k_0 \end{cases}$$



因为He II中的准粒子数不是固定的，所以化学势为零。玻色型准粒子平均占据数为

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega_k) - 1} \quad \text{内能} \quad U = U_0 + \sum_k \hbar \omega_k \langle n_k \rangle = U_0 + \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 \hbar \omega_k}{\exp(\beta \hbar \omega_k) - 1}$$

由此算出的两种元激发对比热的贡献与实验符合得很好。

$$\frac{C_s}{Nk_B} = \frac{2\pi^2 v (k_B T)^3}{15 \hbar^3 c^3}$$

$$\frac{C_x}{Nk_B} = \frac{2\sqrt{m_x} k_0 \varepsilon_0^2 v \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)}{(2\pi)^{3/2} \hbar (k_B T)^{3/2}}$$

$$\text{产生元激发的条件} \quad v \geq \frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{p} \equiv v_c \quad \text{产生声子的条件} \quad v \geq \frac{v_s p}{p} = v_s$$



声子型激发的微观机制

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \hat{u}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

$$\hat{H}_0 = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p$$

采用二次量子化的动量表象

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p'_1, p'_2 \\ p_1, p_2}} \langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \hat{u} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \hat{a}_{p'_1}^+ \hat{a}_{p'_2}^+ \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}$$

应用玻恩近似

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \frac{u_0}{2V} \sum_{\substack{p'_1, p'_2 \\ p_1, p_2}} \hat{a}_{p'_1}^+ \hat{a}_{p'_2}^+ \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}$$

散射长度

$$a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int d^3r \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) u(\mathbf{r}) \approx \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int d^3r u(\mathbf{r}) = \frac{mu_0}{4\pi\hbar^2}$$

一系列近似后得到

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \frac{N^2 u_0}{2V} + \frac{Nu_0}{2V} \sum_{p \neq 0} (\hat{a}_p \hat{a}_{-p} + \hat{a}_p^+ \hat{a}_{-p}^+ + 2\hat{a}_p^+ \hat{a}_p)$$



引入博戈留波夫变换对以上非对角哈密顿量进行对角化

$$\begin{cases} \hat{b}_p^+ = u_p \hat{a}_p^+ - v_p \hat{a}_{-p} \\ \hat{b}_p = u_p \hat{a}_p - v_p \hat{a}_{-p}^+ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{N^2 u_0}{2V} + \sum_{p \neq 0} \left(\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) v_p^2 + \frac{Nu_0}{V} u_p v_p \right) \\ & + \sum_{p \neq 0} \left(\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) (u_p^2 + v_p^2) + \frac{2Nu_0}{V} u_p v_p \right) \hat{b}_p^+ \hat{b}_p \\ & + \sum_{p \neq 0} \left(\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) u_p v_p + \frac{Nu_0}{2V} (u_p^2 + v_p^2) \right) (\hat{b}_p^+ \hat{b}_{-p}^+ + \hat{b}_p \hat{b}_{-p}) \end{aligned}$$

最后一项为
零和玻色子
对易条件:

$$\begin{cases} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) u_p v_p + \frac{Nu_0}{2V} (u_p^2 + v_p^2) = 0 \\ u_p^2 - v_p^2 = 1 \end{cases}$$

得到

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{1}{\sqrt{1 - L_p^2}} \\ v_p &= \frac{L_p}{\sqrt{1 - L_p^2}} \end{aligned}$$