九、平均场理论

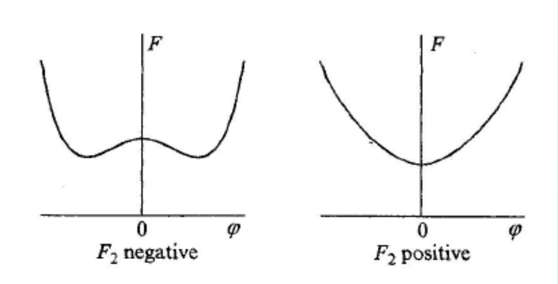
- **分子平均场理论：**研究某个给定的分子，并且忽略涨落，把周围的分子对给定分子的作用看作是平均场。这一方法对于四维及以上的系统是正确的，在三维及以下远离临界点时符合得比较好。

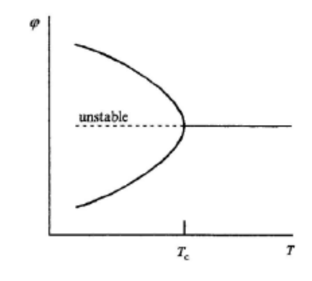
- **热力学微扰理论：**固定某个位点的哈密顿量，通过变分原理确定最优的扰动项。
- **朗道自由能：**相对于给定的序参量形成的自由能曲面，其最小值对应的是（平均场意义下）热力学平衡态的自由能。

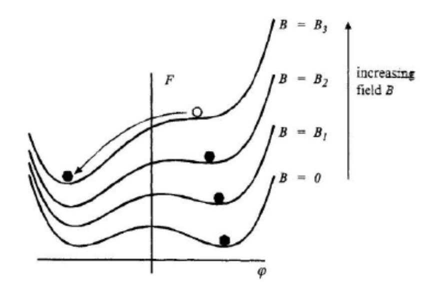
- 二级相变的金兹堡-朗道泛函

$$\mathscr{F}\left[m(\mathbf{x})\right]=\int \mathrm{d}^d x\left(a\left(T-T_\mathrm{c}\right)m^2\left(\mathbf{x}\right)+\frac{b}{2}m^4\left(\mathbf{x}\right)+c\left(\nabla m\left(\mathbf{x}\right)\right)^2-hm\left(\mathbf{x}\right)\right)$$

该泛函的设置出于以下考虑：（1）忽略 $m(\mathbf{x})$ 在临界点附近的涨落；（2）$m(\mathbf{x})$ 的设置不改变原系统哈密顿量的对称性，因此泛函中除了 Zeeman 项外都是偶次幂；（3）梯度项的设置（$c>0$）确保磁化倾向于均匀分布；（4）$b>0$ 以保证更高阶项都是可忽略的小量；（5）$a>0$，当 $T>T_\mathrm{c}$ 时，朗道自由能只有 $m=0$ 一个极小值，而当 $T<T_\mathrm{c}$ 时，有两个不为零的极小值（见下图）。







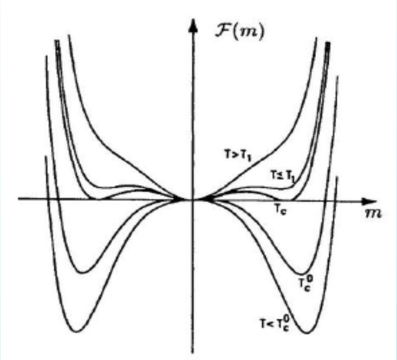
临界指数： $\alpha=0,\ \beta=\frac{1}{2},\ \gamma=1,\ \delta=3,\ \nu=\frac{1}{2},\ \eta=0$

- **一级相变的金兹堡-朗道泛函**

$$\mathscr{F}[m(\mathbf{x})]=\int \mathrm{d}^d x\left(a(T-T_c)m^2(\mathbf{x})+\frac{b}{2}m^4(\mathbf{x})+\frac{v}{2}m^6(\mathbf{x})+c(\nabla m(\mathbf{x}))^2\right) \qquad b<0$$

假设序参量在全空间均匀，则

$$\mathscr{F}(m)=C_0\left(a\left(T-T_c^0\right)m^2+\frac{b}{2}m^4+\frac{v}{2}m^6\right)$$



当$T>T_1$时，只有$m=0$一个极小值点，系统完全无序；当$T\le T_1$时，出现另外两个对称的亚稳态点；当$T\le T_c$时，这两个点比零点更稳定，零点变成亚稳态点；当$T\le T_c^0$时，零点不再是亚稳态点，系统有两个对称的最小值点。

- **金兹堡判据**

因为平均场理论忽略了系统的涨落，而涨落与关联成正比，趋近于临界点时占主导地位，因此平均场理论在临界点附近容易失效。

朗道平均场理论成立的条件为 $|t|^{(d-4)/2} << D$ 即 $d > 4$

$d < 4$ 时朗道平均场理论不适用

$d = 4$ 不十分适用，需要计入对涨落的修正