量子统计 作业一

1．$\{|\phi_i\rangle, i=1,2,\cdots\}$ 是一组完备正交归一基矢，证明 $\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = I$，$I$ 是单位矩阵。

2．同一空间中两组完备正交归一基矢 $\{|\phi_i\rangle, i=1,2,\cdots\}$ 和 $\{|\varphi_i\rangle, i=1,2,\cdots\}$ 有如下幺正变换

$$|\varphi_i\rangle = \sum_n U_{ni}|\phi_n\rangle$$

证明 $U_{ni} = U_{in}^{+} = U_{in}^{-1}$，且 $\sum_i U_{mi}U_{in}^{-1} = \delta_{mn}$。

3．证明不简并厄密算符的本征函数彼此正交，因此其矩阵表示为对角矩阵。

4．力学量 $\hat{A}$ 对应的本征方程为 $\hat{A}|\phi_i\rangle = a_i|\phi_i\rangle$，证明对于任一各阶导数都存在的函数 f，有 $f(\hat{A})|\phi_i\rangle = f(a_i)|\phi_i\rangle$。特别地，对于哈密顿量 $\hat{H}$，有 $e^{-\beta\hat{H}}|\phi_i\rangle = e^{-\beta E_i}|\phi_i\rangle$，其中 E_i 是 $|\phi_i\rangle$ 对应的本征能量。

5．证明对于正则系综的热力学系统，有 $T = \dfrac{\partial U}{\partial S}$，其中 T 是系统温度，U 是内能，S 是熵。

6．已知一维伊辛模型的配分函数 $Z = (2\cosh K)^N + (2\sinh K)^N$，求系统的内能、自由能、熵、压强和热容。

7．利用配分函数从统计物理出发推导出经典理想气体状态方程 $PV = NK_{\mathrm{B}}T$，其中 P 是压强，V 是体积，N 是粒子数，T 是温度，k_{B} 是玻尔兹曼因子。

8．若随机变量 X 服从高斯分布 $\rho(x) = \sqrt{\dfrac{\beta}{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{\beta}{2}(x-\langle X\rangle)^2\right)$，其中 $\langle X\rangle$ 是分布的中心，$\beta^{-1} = \left\langle (x-\langle X\rangle)^2 \right\rangle$，定义高斯生成函数

$$\langle \exp(iqX)\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\beta}{2}(x-\langle X\rangle)^2\right)\exp(iqx)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\beta}{2}(x-\langle X\rangle)^2\right)\mathrm{d}x}$$

证明$\left\langle \exp\left(iqX\right)\right\rangle = \exp\left(iq\left\langle X\right\rangle - q^2/2\beta\right)$。

9. 推导独立粒子系统的统计分布：玻色-爱因斯坦分布、费米-狄拉克分布、麦克斯韦-玻尔兹曼分布。

10．统计算符$\hat{\rho} = \sum_i |\psi_i\rangle P_i \langle\psi_i|$ $\left(\sum_i P_i = 1\right)$，利用$\left\langle \hat{A}\right\rangle = \mathrm{tr}\left(A\hat{\rho}\right)$，证明（1）$\mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\right) = 1$；（2）$\mathrm{tr}\left(\hat{\rho}^2\right) \le 1$。

11．推导量子巨正则系综的统计算符表达式。