量子统计 作业二

1. 给定统计算符 $\hat{\rho}=|\psi_1\rangle P_1\langle\psi_1|+|\psi_2\rangle P_2\langle\psi_2|$，处于正交的两个态 $|\psi_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},|\psi_2\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的统计概率分别为 1/4 和 3/4。求在由 $|\varphi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},|\varphi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 构成的表象下 $\hat{\rho}$ 的密度矩阵。

2. 利用 Jensen's inequality $f\left(\langle x\rangle\right)\le\left\langle f\left(x\right)\right\rangle$（要求 f 是凸函数）由 Jarzynsk’s equality $\exp\left(-\beta\Delta F\right)=\left\langle\exp\left(-\beta W\right)\right\rangle$ 推导出满足热力学第二定律的不等式 $\langle W\rangle\ge\Delta F$。

3. 证明对于巨正则系综下的理想量子气体，粒子数的相对涨落 $\left\langle\Delta N^2\right\rangle\equiv\frac{\left\langle\hat{N}^2\right\rangle-\left\langle\hat{N}\right\rangle^2}{\left\langle\hat{N}\right\rangle^2}\sim\frac{1}{N}$。

4. 证明当体积 $V\to\infty$ 时，对动量的求和可以用积分代替 $\sum_{\{\mathbf{p}_i\}}\to\frac{V}{h^3}\int\mathrm{d}^3p$。

5. 证明经典理想气体的正则配分函数可以写为 $Z_N\left(V,T\right)=\frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N$，其中 N 是粒子数，V 是体积，$\lambda=\sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\mathrm{B}}T}}$，$m$ 是粒子质量，T 是温度。

6. 证明对于巨正则系综，有 $s=-\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P,v=\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T$，其中 s 是比熵，μ 是化学势，T 是温度，v 是比容，P 是压强。

7. 证明对理想玻色气体有 $\left\langle n_0^2\right\rangle-\left\langle n_0\right\rangle^2=\left\langle n_0\right\rangle$，其中 n_0 是处于动量 $\mathbf{p}=0$ 的粒子数目。

8. 推导得出理想玻色气体的内能、熵和定容比热。

9．具体推导朗道超流理论给出的液 He II 中声子和旋子对应的比热：

$$\frac{C_s}{Nk_\mathrm{B}}=\frac{2\pi^2 v\left(k_\mathrm{B}T\right)^3}{15\hbar^3c^3}$$

$$\frac{C_x}{Nk_\mathrm{B}}=\frac{2\sqrt{m_x}\,k_0\varepsilon_0^2 v\exp\left(-\dfrac{\varepsilon_0}{k_\mathrm{B}T}\right)}{\left(2\pi\right)^{3/2}\hbar\left(k_\mathrm{B}T\right)^{3/2}}$$

已知这两种准粒子的能谱为$\hbar\omega_k=\begin{cases} c\hbar k & k<<k_0 \\ \varepsilon_0+\dfrac{\hbar^2\left(k^2-k_0^2\right)}{2m_x} & k\approx k_0 \end{cases}$，且系统内能表示为

$U=U_0+\sum_k \hbar\omega_k\left\langle n_k\right\rangle=U_0+\dfrac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k\,\dfrac{k^2\hbar\omega_k}{\exp\left(\beta\hbar\omega_k\right)-1}$。