量子统计 作业四

1. 考虑正则系综下的压强$P(N,V,T)$和化学势$\mu(N,V,T)$为内禀量，证明

$$\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{T,N} V+\left.\frac{\partial P}{\partial N}\right|_{T,V} N=0 \quad \text{和} \quad \left.\frac{\partial \mu}{\partial V}\right|_{T,N} V+\left.\frac{\partial \mu}{\partial N}\right|_{T,V} N=0$$

即对于系统的内禀量来说，增加体积的效果等同于减少粒子数。

2. 用热力学第二定律（熵增原理）证明两相平衡时，两相的温度、压强、化学势相等。

3. 求给定温度T时，范德华流体方程$\left(P+\frac{aN^2}{V^2}\right)(V-Nb)=Nk_{\mathrm{B}}T$ 对应的麦克斯韦构造的压强。

4. 证明在临界点附近范德华方程可以写为$\Delta\pi=4\Delta\tau-6\Delta\tau\Delta\nu-\frac{3}{2}(\Delta\nu)^3$，其中

$\Delta\pi\equiv\frac{P-P_{\mathrm{c}}}{P_{\mathrm{c}}}$，$\Delta\nu\equiv\frac{V-V_{\mathrm{c}}}{V_{\mathrm{c}}}$，$\Delta\tau\equiv\frac{T-T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{c}}}$。

5. 求两相共存系统的双节线和旋节线的交点处的归一化浓度和相应的温度。

6. 在临界点附近约化自由能有形式

$$f(T,h)=\frac{\Delta F}{k_{\mathrm{B}}TV}=A|t|^{2-\alpha}\,Y\left(D\frac{h}{|t|^{\Delta}}\right)$$

其中ΔF 是对临界自由能的奇异部分的偏离，A 是与体系相关的能量系数，D 是与体系相关的磁化系数，$\Delta=2-\alpha-\beta$。$Y(y)$是与系统无关的普适函数，$Y(0)=1$。计算表明从该约化自由能表达式出发可以得到标度律的四个关系。

7. 系统在 $t=0$ 时刻突然撤除持续作用的微扰哈密顿量 ΔH 。证明动力学量的非平衡系综平均 $\overline{A}(t)=\langle A\rangle-\beta\left(\langle\Delta H A(t)\rangle-\langle A\rangle\langle\Delta H\rangle\right)+O\left((\beta\Delta H)^2\right)$ 。

8. （1）证明当 $\omega\tau\to\infty$ 时，有 $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{d}t\exp(in\omega t)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$ ；（2）证明系统在单位时间内从扰动 $f(t)=\mathrm{Re}\, f_\omega\exp(-i\omega t)$ 吸收的能量为

$$U_a(\omega)=\frac{\omega}{2}\left|f_\omega\right|^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\chi(t)\sin(\omega t)$$

9. 当 $A(t)$ 遵从谐振子动力学 $\frac{\mathrm{d}^2 A(t)}{\mathrm{d}t^2}=-\omega_0^2 A(t)$ 时，证明其涨落关联函数 $\langle\delta A(0)\delta A(t)\rangle=\left\langle(\delta A)^2\right\rangle\cos(\omega_0 t)$ ，相应地，系统在单位时间内吸收的能量 $U_{\mathrm{a}}(\omega)\propto\delta(\omega-\omega_0)$