

量子统计

王延颢

2015年5月17日

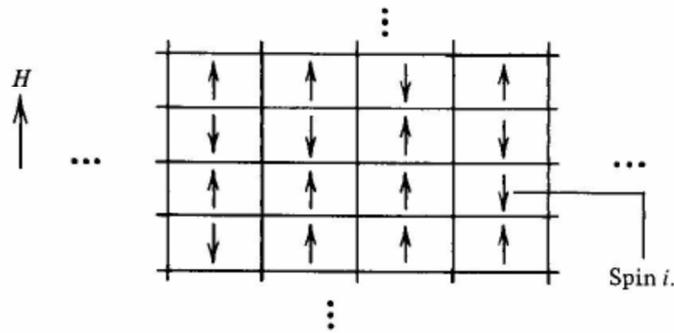
13. 平均场理论

13.1. 伊辛 (Ising) 模型

伊辛模型是最简单的铁磁—顺磁相变的离散模型，每个格点的自旋取值 s 只能是+1 或者-1，并且只与最临近的格点有相互作用。其哈密顿量为

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - \mu_0 h \sum_{i=1}^N s_i \quad (13.1)$$

其中 $\langle \rangle$ 表示只有当 i 和 j 为临近格点时才进行求和运算（只计算一次）， J 是相互作用能， h 是外磁场， μ 是磁矩。



当 $J > 0$ 且温度很低时，即使没有外场作用，系统也会由于哈密顿量的自发对称破缺，产生具有长程序的**自发磁化强度**

$$\langle M \rangle = \sum_{i=1}^N \mu_0 s_i \quad (13.2)$$

当温度高于临界温度（居里温度） T_c 时，自发磁化消失，系统在 T_c 点发生有序到无序的相变。

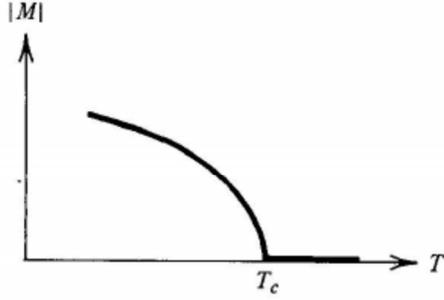


Fig. 5.2. Spontaneous magnetization.

系统的哈密顿量为

$$Z(\beta, N, B) = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \cdots \sum_{s_N = \pm 1} \exp \left(\beta \mu_0 h \sum_{i=1}^N s_i + \beta J \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j \right) \quad (13.3)$$

以后将证明，零外场的一维伊辛模型的严格解为

$$Z(\beta, N, 0) = \left(2 \cosh(\beta J) \right)^N \quad (13.4)$$

一维的 $T_c = 0$ ，即有限温度下没有相变。这是因为一维时每个格点反转自旋所需克服的能垒都很小。

昂萨格得到零外场二维伊辛模型的严格解为

$$Z(\beta, N, 0) = \left(2 \cosh(\beta J) \exp(I) \right)^N \quad (13.5)$$

其中

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \ln \left(\frac{1}{2} \left(1 + \left(1 - \kappa^2 \sin^2 \phi \right)^{1/2} \right) \right) \quad (13.6)$$

$$\kappa = 2 \sinh(2\beta J) / \cosh^2(2\beta J)$$

昂萨格解显示二维伊辛模型的自由能不是解析函数。系统温度低于相变温度

$$T_c = 2.269J / k_B \quad (13.7)$$

时，有自发磁化。在 T_c 点，热容表现为奇点

$$\frac{C_v}{N} \sim \left(\frac{8k_B}{\pi} \right) (\beta J)^2 \ln \left| \frac{1}{T - T_c} \right| \quad (13.8)$$

磁化强度的表现为

$$\frac{M}{N} \sim (T_c - T)^\beta \quad T < T_c \quad (13.9)$$

其中临界指数 $\beta = 1/8$ （注意不是温度倒数的那个 β ）。

到目前为止还没有得到三维伊辛模型的解析解。数值模拟表明三维的临界温度 T_c 大致是二维的两倍，在临界温度附近，有

$$\frac{C_v}{N} \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad (13.10)$$

和

$$\frac{M}{N} \sim (T_c - T)^\beta \quad T < T_c \quad (13.11)$$

其中临界指数 $\alpha \approx 0.125, \beta \approx 0.313$ 。

13.2. 自发对称破缺

如果考察磁化强度的定义

$$\langle M \rangle = \frac{1}{Z} \sum_v \left(\sum_{i=1}^N \mu s_i \right) \exp(-\beta E_v) \quad (13.12)$$

由于哈密顿量的对称性，任何温度下都应该为零。那么自发磁化是如何出现的呢？

一种解释是看以磁化强度 M 为参量的自由能曲面。相应的配分函数的分量为

$$Z(M) = \sum_v \delta(M - M_v) \exp(-\beta E_v) \quad (13.13)$$

其中 $\delta(M - M_v)$ 当 $M = M_v$ 时为 1，否则为 0。相应的自由能曲面

$$F(M) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(M) \quad (13.14)$$

决定了系统改变 M 的可逆功（见下图）。图中的 E^* 是系统依靠热涨落从一个势阱跳到另一个

势阱所需翻越的势垒。在二维情形下， $E^* \sim N^{1/2}$ ，三维情形下， $E^* \sim N^{2/3}$ ，因此势垒随粒子数增加而增加，而能量的热涨落随粒子数增加而减小，所以当 $N \rightarrow \infty$ 时，系统翻越势垒的几率趋于 0，系统将（几乎）永远处于由初始条件确定的势阱中。而当温度增加时，翻越势垒变得容易，当 $T > T_c$ 时， $E^* = 0$ ，系统恢复了对称性。

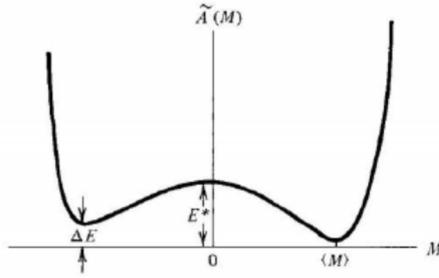


Fig. 5.4. Reversible work function for the magnetization.

另一个看待对称性破缺的角度是考察序关联函数

$$C_{ij} = \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \quad (13.15)$$

磁化率为

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{N} \left. \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial h} \right|_{\beta} = \frac{\beta}{N} \left(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \right) \\ &= \frac{\mu_0^2}{N} \beta \sum_{i,j=1}^N \left(\langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \right) \\ &= \mu_0^2 \beta \sum_{j=1}^N C_{1j} \end{aligned} \quad (13.16)$$

其中所有位点都是全同的。该表达式只有当关联函数 C_{1j} 对于 $N \rightarrow \infty$ 时依然不为 0 才会发散，因此磁化率的发散对应于自旋的长程序关联。而在 $T < T_c$ 时，当 $N \rightarrow \infty$ ，磁化强度

$$\langle M \rangle = \begin{cases} Nm_0 \mu_0 & h \rightarrow 0^+ \\ -Nm_0 \mu_0 & h \rightarrow 0^- \end{cases} \quad (13.17)$$

在 $h = 0$ 处不连续，因此 χ 发散，对应于长程序关联。其中 $m_0 \mu_0$ 是平均每个位点的自发磁化强度。

有对称破缺发生的一级相变（例如固液相变）没有临界点。

13.3. 连续对称系统的 Goldstone 定理

Goldstone 定理： 对于具有连续空间对称性的系统（例如自旋方向可以连续变化的顺磁系统），如果保持对称性的相互作用为短程作用，当对称性发生破缺时，会激发出质量为零

的 Goldstone 玻色子（连续激发： $\varepsilon(k \rightarrow 0) \rightarrow 0$ ）。

超导中的激发子和希格斯粒子源于类似的机制，只是因为具有长程作用，所以这些激发子有质量（不连续激发）。

13.4. 分子平均场理论

分子平均场理论的基本思想是研究某个给定的分子，并且忽略涨落，把周围的分子对给定分子的作用看作是平均场，从而把多体的统计问题简化成少体问题。这一平均场方法对于四维及以上的系统是正确的。在三维及以下远离临界点时符合得比较好。以下以伊辛模型为例。

把伊辛模型的哈密顿量(13.1)对 s_i 求偏导，得到作用在 i 上的瞬时磁场

$$\mu_0 h_i = -\frac{\partial H}{\partial s_i} = \mu_0 h + J \sum_{\langle j \rangle_i} s_j \quad (13.18)$$

其中求和只对 i 的临近位点进行。瞬时磁场的系综平均值为

$$\langle h_i \rangle = h + \frac{J}{\mu_0} \left\langle \sum_{\langle j \rangle_i} s_j \right\rangle = h + \frac{Jz}{\mu_0} \langle s_i \rangle \quad (13.19)$$

其中 z 是临近位点的数目。哈密顿量近似写成

$$H \approx \sum_j H_j \approx -\mu_0 \sum_j \langle h_j \rangle s_j \quad (13.20)$$

从而得到自洽场方程

$$\begin{aligned} \langle s_i \rangle &= \frac{\sum_{s_1} \cdots \sum_{s_N} s_i \exp(-\beta H)}{\sum_{s_1} \cdots \sum_{s_N} \exp(-\beta H)} \approx \frac{\sum_{s_i=\pm 1} s_i \exp(\beta \mu_0 \langle h_i \rangle s_i)}{\sum_{s_i=\pm 1} \exp(\beta \mu_0 \langle h_i \rangle s_i)} \\ &= \tanh(\beta \mu_0 \langle h_i \rangle) = \tanh(\beta \mu_0 h + \beta Jz \langle s_i \rangle) \end{aligned} \quad (13.21)$$

令 $m \equiv \langle s_i \rangle$ ，当外场 $h = 0$ 时，只有当 $\beta zJ > 1$ 时 m 才有非零解。所以对于立方晶格，临界温度

$$T_c = 2dJ / k_B \quad (13.22)$$

其中 d 是系统的维数。对于 $T < T_c$ ，温度和平均磁化强度的关系为

$$\beta = \frac{1}{2zJm} \ln \left(\frac{1+m}{1-m} \right) \quad (13.23)$$

可以看出对于每个温度都有 $m = -m$ 两个对称的解，这是对对称性破缺的直接结果。

这一理论对于一、二、三维伊辛模型给出的临界温度分别为 $2J/k_B, 4J/k_B, 6J/k_B$ ，而实际临界温度分别为 $0, 2.3J/k_B, 4J/k_B$ ，有很大差异。

13.5. 热力学微扰理论 (Thermodynamic Perturbation Theory)

热力学微扰理论是另一种形式的平均场理论，主要思想是固定单个位点的哈密顿量，通过变分原理确定最优的扰动项。仍旧以伊辛模型为例，把位点之间的相互作用看作是对位点本身的扰动作用，从而把系统哈密顿量写为

$$H_{\text{TP}} = -\mu_0 (h - \Delta h) \sum_{i=1}^N s_i \quad (13.24)$$

其中 Δh 是待定的代表位点间相互作用的等效磁场，则

$$\Delta H = -\mu_0 \Delta h \sum_{i=1}^N s_i = H - H_{\text{TP}} \quad (13.25)$$

是系统的真实哈密顿量与微扰理论的哈密顿量之间的差异，而系统配分函数

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{s_i\}} \exp(-\beta(H_{\text{TP}} + \Delta H)) \\ &= Z_{\text{TP}} \sum_{\{s_i\}} \exp(-\beta H_{\text{TP}}) \exp(-\beta \Delta H) / Z_{\text{TP}} \end{aligned} \quad (13.26)$$

其中平均场配分函数

$$Z_{\text{TP}} = \sum_{\{s_i=\pm 1\}} \prod_{j=1}^N \exp(\beta \mu_0 (h - \Delta h) s_j) = \left(2 \cosh(\beta \mu_0 (h - \Delta h)) \right)^N \quad (13.27)$$

定义微扰系综平均

$$\langle \dots \rangle_{\text{TP}} = \frac{1}{Z_{\text{TP}}} \sum_{\{s_i\}} [\dots] \exp(-\beta H_{\text{TP}}) \quad (13.28)$$

则某个位点的平均自旋为

$$\langle s_i \rangle_{\text{TP}} = \tanh(\beta \mu_0 (h - \Delta h)) \quad (13.29)$$

系统配分函数写为

$$Z = Z_{\text{TP}} \left\langle \exp(-\beta \Delta H) \right\rangle_{\text{TP}} \quad (13.30)$$

当 ΔH 是小量时，对微扰系综平均进行泰勒展开，得到

$$\begin{aligned}
\langle \exp(-\beta\Delta H) \rangle_{\text{TP}} &= \langle 1 - \beta\Delta H + \dots \rangle_{\text{TP}} \\
&= 1 - \beta \langle \Delta H \rangle_{\text{TP}} + \dots \\
&= \exp(-\beta \langle \Delta H \rangle_{\text{TP}}) + \dots
\end{aligned} \tag{13.31}$$

其中忽略了 ΔH 的二阶及以上项。则系统哈密顿量

$$Z \approx Z_{\text{TP}} \exp(-\beta \langle H - H_{\text{TP}} \rangle_{\text{TP}}) \tag{13.32}$$

再从另一个角度作近似。利用 $\exp(x) \geq 1 + x$ ，得到

$$\langle \exp(x) \rangle = \exp(\langle x \rangle) \langle \exp(x - \langle x \rangle) \rangle \geq \exp(\langle x \rangle) \langle 1 + x - \langle x \rangle \rangle = \exp(\langle x \rangle) \tag{13.33}$$

因而有

$$Z \geq Z_{\text{TP}} \exp(-\beta \langle H - H_{\text{TP}} \rangle_{\text{TP}}) \tag{13.34}$$

以上不等式被称为**吉布斯—博戈留波夫—费曼边界**。可以利用这一不等式求最优扰动解：

$$\frac{\partial}{\partial \Delta h} Z_{\text{TP}} \exp(-\beta \langle \Delta H \rangle_{\text{TP}}) = 0 \tag{13.35}$$

经过计算得到

$$\mu_0 \Delta h = zJ \langle s_i \rangle_{\text{TP}} \tag{13.36}$$

此最优解与从物理图像出发的分子平均场一致，因此分子平均场的结果是在平均场假定的框架下所能获得的最好的解。

13.6. 朗道平均场理论

13.6.1. 朗道自由能

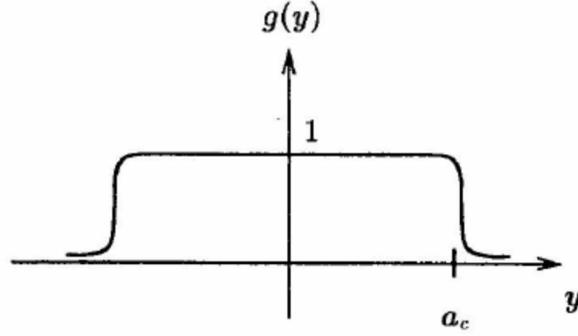
朗道自由能是指相对于给定的序参量形成的自由能曲面，其最小值对应的是（平均场意义下）热力学平衡态的自由能。以下以伊辛模型为例说明。

对于 d 维的伊辛模型，定义坐标 \mathbf{x} 处单位体积的连续磁化强度

$$m(\mathbf{x}) = \frac{1}{M a_0^d} \sum_i g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) s_i \tag{13.37}$$

其中 M 是一个边长为 a_c 的单元格内的位点数目， a_0 是最临近位点之间的距离， a_c 的选取

满足条件 $a_0 \ll a_c \ll L$ ，其中 L 是整个系统的边长。函数 $g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ 在单元格外取值为 1，单元格外取值为 0，从 0 到 1 连续过渡，从而使得 $m(\mathbf{x})$ 是坐标 \mathbf{x} 的连续函数。



外场作用项 (Zeeman 项)

$$\sum_i h s_i = h \sum_i \frac{1}{M a_0^d} \int d^d x g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) s_i = \int d^d x h m(\mathbf{x}) \quad (13.38)$$

$m(\mathbf{x})$ 出现几率的泛函

$$P[m(\mathbf{x})] = \left\langle \delta \left(m(\mathbf{x}) - \frac{1}{M a_0^d} \sum_i g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) s_i \right) \right\rangle \quad (13.39)$$

对应的朗道自由能泛函为

$$F[m(\mathbf{x})] \propto -\frac{1}{\beta} \ln(P[m(\mathbf{x})]) \quad (13.40)$$

系统的配分函数

$$Z = Z_0(T) \int \mathcal{D}[m(\mathbf{x})] \exp(-\beta F[m(\mathbf{x})]) \quad (13.41)$$

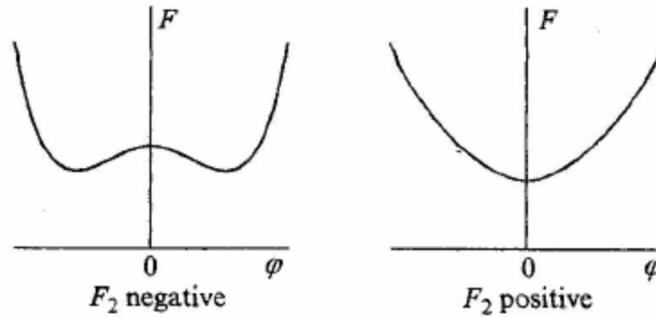
其中 $Z_0(T)$ 是对 $m(\mathbf{x})$ 的值没有贡献的短波长变量对应的配分函数。

13.6.2. 二级相变

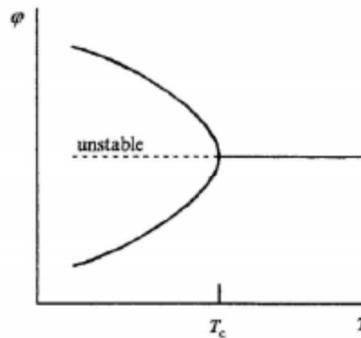
在临界点 T_c 附近，数值很小的 $m(\mathbf{x})$ 占主导地位，因此可以做泰勒展开，把该朗道自由能泛函写成金兹堡—朗道 (Ginzburg—Landau) 泛函：

$$F[m(\mathbf{x})] = \int d^d x \left(a(T - T_c) m^2(\mathbf{x}) + \frac{b}{2} m^4(\mathbf{x}) + c (\nabla m(\mathbf{x}))^2 - h m(\mathbf{x}) \right) \quad (13.42)$$

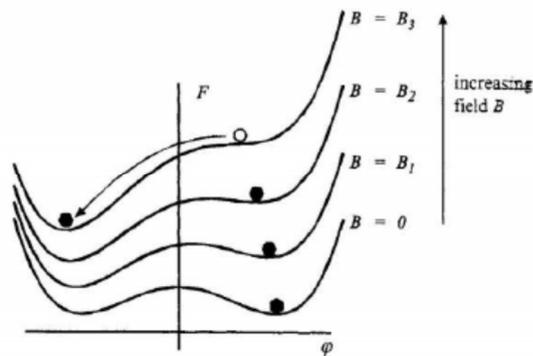
该泛函的设置出于以下考虑：(1) 忽略 $m(\mathbf{x})$ 在临界点附近的涨落；(2) $m(\mathbf{x})$ 的设置不改变原系统哈密顿量的对称性，因此泛函中除了 Zeeman 项外都是偶次幂；(3) 梯度项的设置 ($c > 0$) 确保磁化倾向于均匀分布；(4) $b > 0$ 以保证更高阶项都是可忽略的小量；(5) $a > 0$ ，当 $T > T_c$ 时，朗道自由能只有 $m = 0$ 一个极小值，而当 $T < T_c$ 时，有两个不为零的极小值（见下图）。



序参量随温度的变化见下图，在临界点处产生对称破缺。



朗道自由能随外场的变化见下图。随外场增加两个对称的稳定态变得不对称。



以下用金兹堡—朗道泛函求朗道平均场理论中的临界指数。在临界点附近假设各处序参量都相等，即 $m = m(\mathbf{x})$ ，则金兹堡—朗道泛函对应的朗道自由能简化成

$$F(m) = C_0 \left(a(T - T_c)m^2 + \frac{b}{2}m^4 - hm \right) \quad (13.43)$$

其中 C_0 是与 m 无关的常数。自由能极小值对应的序参量 m_0 必须满足条件

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial F(m)}{\partial m} \right|_{m=m_0} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 F(m)}{\partial m^2} \right|_{m=m_0} > 0 \end{cases} \quad (13.44)$$

对上式计算可得

$$\begin{cases} 2aT_c t m_0 + 2b m_0^3 - h = 0 \\ 2aT_c t + 6b m_0^2 > 0 \end{cases} \quad (13.45)$$

其中 $t \equiv \frac{T - T_c}{T_c}$ 。当 $h = 0$ 时，解得

$$m_0 = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ \pm \sqrt{\frac{aT_c}{b}} |t|^{1/2} & t < 0 \end{cases} \quad (13.46)$$

由此得到临界指数 $\beta = \frac{1}{2}$ 。

由式(13.45)的第一式和式(13.46)得到

$$\begin{aligned} \chi &= \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{T, m=m_0} = \frac{1}{2aT_c t + 6b m_0^2} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2aT_c} |t|^{-1} & t > 0 \\ \frac{1}{4aT_c} |t|^{-1} & t < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (13.47)$$

因此求得临界指数 $\gamma = 1$ 。

式(13.45)的第一式中，令 $a = 0$ ，得到

$$m_0 = (2b)^{-1/3} h^{1/3} \quad (13.48)$$

因此求得临界指数 $\delta = 3$ 。

当 $h = 0$ 时，把式(13.46)代入式(13.43)，得到

$$F = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ -\frac{C_0 a^2 T_c^2}{2b} |t|^2 & t < 0 \end{cases} \quad (13.49)$$

由此得到热容

$$C = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ \frac{C_0 a^2 T}{b} & t < 0 \end{cases} \quad (13.50)$$

能使这一热容在临界点两边都满足标度律 $C \sim |t|^{-\alpha}$ 的只能是 $\alpha = 0$ 。

为了求出关联函数临界指数 η 和关联长度临界指数 ν ，需要用到涨落的信息，因此必须回到用 $m(\mathbf{x})$ 定义的朗道自由能式(13.42)。由变分原理

$$\frac{\delta}{\delta m(\mathbf{x})} F[m(\mathbf{x})] = 0 \quad (13.51)$$

并利用泛函求导公式

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta m(\mathbf{x})} \int d^d x' m(\mathbf{x}') &= 1 \\ \frac{\delta}{\delta m(\mathbf{x})} m(\mathbf{x}') &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \frac{\delta}{\delta m(\mathbf{x})} \int d^d x' \frac{1}{2} |\nabla m(\mathbf{x}')|^2 &= -\nabla^2 m(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (13.52)$$

得到

$$h(\mathbf{x}) = a(T - T_c) m(\mathbf{x}) - 2c \nabla^2 m(\mathbf{x}) + 2b m^3(\mathbf{x}) \quad (13.53)$$

上式对 $h(\mathbf{x}')$ 求导，得到响应函数所满足的方程

$$(aT_c t + 6b m^2(\mathbf{x}) - 2c \nabla^2) \chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (13.54)$$

把式(13.46)代入上式，得到

$$\begin{cases} (aT_c t - 2c\nabla^2)\chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & t > 0 \\ (-11aT_c t - 2c\nabla^2)\chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & t < 0 \end{cases} \quad (13.55)$$

作傅里叶变换，得到

$$\chi(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{-1}{2ck^2 - aT_c t} & t > 0 \\ \frac{-1}{2ck^2 + 11aT_c t} & t < 0 \end{cases} \quad (13.56)$$

令

$$\begin{aligned} \xi_+ &\equiv \left(\frac{aT_c t}{2c}\right)^{-1/2} \\ \xi_- &\equiv \left(-\frac{11aT_c t}{2c}\right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (13.57)$$

则

$$\chi(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{1/2c}{\xi_+^{-2} - k^2} & t > 0 \\ \frac{1/2c}{\xi_-^{-2} - k^2} & t < 0 \end{cases} \quad (13.58)$$

做逆变换得到

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{2c} \int d^d k \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}{k^2 - \xi^{-2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} x^{2-d} \exp(-x/\xi) \quad (13.59)$$

其中 $\xi = \begin{cases} \xi_+ & t > 0 \\ \xi_- & t < 0 \end{cases}$ 。关联函数

$$C(r) = \langle \delta m(0) \delta m(r) \rangle \sim \frac{1}{\beta} \chi(r) \sim r^{2-d} \exp(-r/\xi) \quad (13.60)$$

而标度理论给出

$$\begin{aligned} C(r) &\sim r^{2-d+\eta} \exp(-r/\xi) \\ \xi &\sim |t|^{-\nu} \end{aligned} \quad (13.61)$$

所以有 $\nu = \frac{1}{2}$ 和 $\eta = 0$ 。

归纳起来，朗道的平均场理论给出的六个临界指数的值为

$$\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 1, \delta = 3, \nu = \frac{1}{2}, \eta = 0 \quad (13.62)$$

可以证明，气液系统的范德瓦尔斯方程和铁磁的外斯理论都在朗道平均场理论的框架内。

13.6.3. 一级相变

当外场为零时，若 $b < 0$ ，需要在金兹堡—朗道泛函中再加一项以保持稳定：

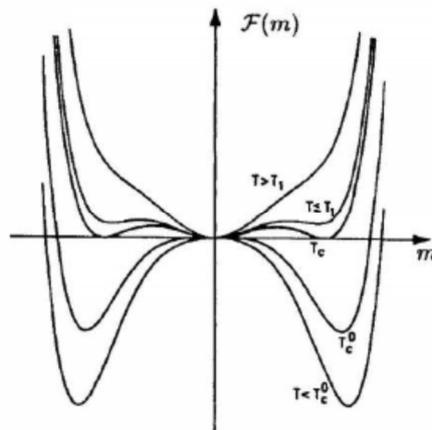
$$F[m(\mathbf{x})] = \int d^d x \left(a(T - T_c) m^2(\mathbf{x}) + \frac{b}{2} m^4(\mathbf{x}) + \frac{\nu}{2} m^6(\mathbf{x}) + c(\nabla m(\mathbf{x}))^2 \right) \quad (13.63)$$

依然假设 m 在全空间均匀，有

$$F(m) = C_0 \left(a(T - T_c^0) m^2 + \frac{b}{2} m^4 + \frac{\nu}{2} m^6 \right) \quad (13.64)$$

该自由能泛函可以用来描述一级相变，图解见下图。其中 T_c^0 是过冷温度， $T_1 = T_c^0 + \frac{b^2}{6\nu a}$ 是

过热温度， $T_c = T_c^0 + \frac{b^2}{8\nu a}$ 是一级相变点。



当 $T > T_1$ 时，只有 $m = 0$ 一个极小值点，系统完全无序；当 $T \leq T_1$ 时，出现另外两个对称的亚稳态点；当 $T \leq T_c$ 时，这两个点比零点更稳定，零点变成亚稳态点；当 $T \leq T_c^0$ 时，

零点不再是亚稳态点，系统有两个对称的最小值点。

13.6.4. 金兹堡判据

因为平均场理论忽略了系统的涨落，而涨落与关联成正比，趋近于临界点时占主导地位，因此平均场理论在临界点附近容易失效。下面研究平均场理论成立（即可以忽略涨落）的条件。

依然以铁磁系统为例。总磁化率

$$X \equiv \frac{\partial M}{\partial h} = \beta \left(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \right) = \beta \langle (\Delta M)^2 \rangle \quad (13.65)$$

其中 M 是总磁化强度。涨落可以忽略的条件是

$$\frac{\langle (\Delta M)^2 \rangle}{\langle M \rangle^2} = \frac{X}{\beta \langle M \rangle^2} \ll 1 \quad (13.66)$$

由此给出**金兹堡判据**

$$X \ll \beta \langle M \rangle^2 \quad (13.67)$$

考虑一个在体积为 $V \sim \xi^d$ 的空间内的系统从低温趋近于临界点。把临界指数关系

$$\chi \equiv \frac{X}{V} = a |t|^{-\gamma}, m \equiv \frac{M}{V} = b |t|^\beta \quad (13.68)$$

其中 a 和 b 都是正常数。代入上式，得到

$$k_B T_c a \xi^d |t|^{-\gamma} \ll \left(b \xi^d |t|^\beta \right)^2, \quad t \rightarrow 0^- \quad (13.69)$$

而关联长度

$$\xi = c |t|^{-\nu} \quad (13.70)$$

其中 c 是正常数，所以有

$$|t|^{-\gamma-2\nu} \ll \frac{b^2 c^d}{a k_B T_c}, \quad t \rightarrow 0^- \quad (13.71)$$

利用标度律 $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ 以及朗道的平均场理论给出的数值 $\nu = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = 0$ ，把上式写为

$$|t|^{(d-4)/2} \ll D \quad (13.72)$$

其中 D 为正常数。因为 $|t|$ 的数值可以任意小，因此上式成立的条件为 $d > 4$ ，这就是金兹堡判据给出的朗道平均场理论成立的条件。当 $d < 4$ 时，朗道平均场理论不适用，而当 $d = 4$ 时不十分适用，需要计入对涨落的修正才适用。