量子统计

王延颋

2015 年 4 月 7 日

9. 费米气体与费米液体

9.1. 理想费米气体的一般性质

根据量子配分函数，曾经求得理想费米气体的状态方程为

$$\begin{cases} \dfrac{P}{k_{\mathrm{B}}T} = \dfrac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \\ \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \end{cases} \tag{9.1}$$

其中

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{\dfrac{2\pi\hbar^2\beta}{m}}, \quad z = \exp(\beta\mu) \\ f_{5/2}(z) \equiv \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x x^2 \ln\left(1 + z\exp\left(-x^2\right)\right) = \sum_{l=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{5/2}} \\ f_{3/2}(z) \equiv z\dfrac{\partial}{\partial z} f_{5/2}(z) = \displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \end{cases} \tag{9.2}$$

数学上可以求得（证明见杨展如第 147—148 页）

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left((\ln z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-1/2} + \cdots\right) \tag{9.3}$$

在低温和高密度条件下，有 $\lambda << v^{1/3}$，此时状态方程的第二式为

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(\ln z)^{3/2} \tag{9.4}$$

把 λ 的表达式代入上式，从而得到**费米能**（绝对零度时的化学势）

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} \equiv \mu(T=0) = \frac{1}{\beta}\ln z = \left(\frac{6\pi^2}{v}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \tag{9.5}$$

考虑每个单粒子能级有 g 重简并，则

$$\varepsilon_{\mathrm{F}}=\left(\frac{6\pi^2}{gv}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m} \tag{9.6}$$

根据费米—狄拉克分布，在$T\to 0$时，

$$\begin{aligned}&\lim_{\beta\to\infty}\left\langle n_p\right\rangle=\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\exp\left(\beta\left(\varepsilon_p-\varepsilon_{\mathrm{F}}\right)\right)+1}\\&=\begin{cases}1 & \varepsilon_p<\varepsilon_{\mathrm{F}}\\0 & \varepsilon_p>\varepsilon_{\mathrm{F}}\end{cases}\end{aligned} \tag{9.7}$$

所以**费米能的物理意义是：在绝对零度时，所有粒子从基态开始，依次占据最低能态，直至费米能ε_{F}时止**。在动量空间中，粒子填充一个半径为

$$p_{\mathrm{F}}=\sqrt{2m\varepsilon_{\mathrm{F}}}=\hbar\left(\frac{6\pi^2}{gv}\right)^{1/3} \tag{9.8}$$

的球，球的表面成为**费米球**（最简单的费米面）。

高温时由状态方程式(9.1)的第二项可得

$$\frac{\lambda^3}{v}=f_{3/2}\left(z\right)\approx z-\frac{z^2}{2^{3/2}}+O\left(z^3\right) \tag{9.9}$$

由此解得

$$z=\frac{\lambda^3}{v}+2^{-3/2}\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2+O\left(\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^3\right) \tag{9.10}$$

因此**高温下的化学势**

$$\mu=\frac{1}{\beta}\ln z\approx\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\lambda^3}{v}+2^{-3/2}\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2\right) \tag{9.11}$$

以下求理想费米气体在**有限低温下的热力学量**。取式(9.3)的前两项，得

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathrm{F}} &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{v}\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{\lambda^3} f_{3/2}(z)\right)^{2/3} \\
&\approx \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{8\pi^{3/2}}{\lambda^3}(\ln z)^{3/2}\left(1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}\right)\right)^{2/3} \\
&= \frac{1}{\beta}\ln z\left(1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}\right)^{2/3} = \mu\left(1+\frac{\pi^2}{8}(\beta\mu)^{-2}\right)^{2/3} \\
&\approx \mu\left(1+\frac{\pi^2}{12}(\beta\mu)^{-2}\right)
\end{aligned} \tag{9.12}
$$

最后一步用到了 $\frac{1}{\beta\mu}$ 作为小量的泰勒展开。同样因为 β 值在低温下很大，所以可以近似把上式第二项中的 μ 用 ε_{F} 代替，并作泰勒展开，得到有限低温下的**化学势**

$$
\mu \approx \varepsilon_{\mathrm{F}} / \left(1+\frac{\pi^2}{12}(\beta\varepsilon_{\mathrm{F}})^{-2}\right) \approx \varepsilon_{\mathrm{F}}\left(1-\frac{\pi^2}{12}(\beta\varepsilon_{\mathrm{F}})^{-2}\right) \tag{9.13}
$$

平均填布数为

$$
\left\langle n_p \right\rangle = \frac{1}{\exp\left(\beta\left(\varepsilon_p-\mu\right)\right)+1} \tag{9.14}
$$

内能

$$
\begin{aligned}
U &= \sum_p \varepsilon_p \left\langle n_p \right\rangle = \frac{V}{h^3}\int d^3\mathbf{p}\,\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\left\langle n_p \right\rangle = \frac{4\pi V}{2mh^3}\int_0^\infty p^4 \left\langle n_p \right\rangle \mathrm{d}p \\
&= \frac{\beta V}{20\pi^2 m^2 \hbar^3}\int_0^\infty \frac{p^6 \exp\left(\beta\left(\varepsilon_p-\mu\right)\right)}{\left(\beta\left(\varepsilon_p-\mu\right)+1\right)^2}\mathrm{d}p
\end{aligned} \tag{9.15}
$$

最后一步用到了分部积分。参考获得式(9.3)的方法，最终得到**理想费米气体的内能**为

$$
U = \frac{3N}{5}\varepsilon_{\mathrm{F}}\left(1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{1}{\beta\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2+\cdots\right) \tag{9.16}
$$

定容比热为

$$
C_V \approx \frac{\pi^2 N k_{\mathrm{B}}}{2\beta\varepsilon_{\mathrm{F}}} \tag{9.17}
$$

由理想气体内能 $U=\frac{3}{2}PV$，可得**状态方程**为

$$PV = \frac{2}{3}U = \frac{2}{5}N\varepsilon_{\mathrm{F}}\left(1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{1}{\beta\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2+\cdots\right) \tag{9.18}$$

由上式可以看出，即使在$T = 0\,\mathrm{K}$，压强也不等于零，这是因为泡利不相容原理只容许一个粒子处于动量为零的状态，其它动量不为零的粒子会产生非零压力。

亥姆霍兹自由能为

$$\begin{aligned} F &= G - PV = \mu N - PV \\ &= \frac{3}{5}N\varepsilon_{\mathrm{F}}\left(1-\frac{5\pi^2}{18}\left(\frac{1}{\beta\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2+\cdots\right) \end{aligned} \tag{9.19}$$

熵为

$$S = k_{\mathrm{B}}\beta\left(U - F\right) = k_{\mathrm{B}}\beta\frac{\pi^2}{3}N\varepsilon_{\mathrm{F}}\left(\frac{1}{\beta\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2 = \frac{\pi^2 Nk_{\mathrm{B}}}{3\beta\varepsilon_{\mathrm{F}}} \tag{9.20}$$

9.2. 白矮星的统计平衡

对白矮星的观察数据进行分析，形成了如下的理想化模型：由总质量$M \approx 10^{33}\ \mathrm{g}$的氦组成的密度为$\rho \approx 10^7\ \mathrm{g/cm^3}$、中心温度为$T \approx 10^7\ \mathrm{K}$的高密度球。高温使氦处于完全离化状态，因此可以视为N个处于基态的电子在$\frac{N}{2}$个不动的氦核背景中运动。这个系统所呈现的特性是泡利原理、相对论动力学和引力定律的联合效果。以下证明**白矮星的质量不能超过某个临界质量M_0，否则泡利原理引起的压强不足以对抗引力而导致塌缩。**

首先计算处于基态的相对论电子气体产生的压强。费米气体的基态能量是

$$E_0 = 2\sum_{|p|<p_{\mathrm{F}}}\sqrt{\left(pc\right)^2+\left(m_{\mathrm{e}}c^2\right)^2} = \frac{2V}{h^3}\int_0^{p_{\mathrm{F}}} dp 4\pi p^2\sqrt{\left(pc\right)^2+\left(m_{\mathrm{e}}c^2\right)^2} \tag{9.21}$$

其中m_{e}是电子质量，p_{F}是费米动量，c是光速。因为电子简并度$g = 2s+1 = 2$，其中$s = \frac{1}{2}$是电子自旋，所以

$$p_{\mathrm{F}} = \hbar\left(\frac{6\pi^2}{gv}\right)^{1/3} = \hbar\left(\frac{3\pi^2}{v}\right)^{1/3} \tag{9.22}$$

令$x = \frac{p}{m_{\mathrm{e}}c}$， $x_{\mathrm{F}} = \frac{p_{\mathrm{F}}}{m_{\mathrm{e}}c}$， 则式(9.21)成为

$$E_0 = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V f\left(x_F\right) \tag{9.23}$$

其中

$$f\left(x_F\right) = \int_o^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{3} x_F^3 \left(1 + \frac{3}{10} x_F^2 + \cdots\right) & x_F << 1 \\ \frac{1}{4} x_F^4 \left(1 + \frac{1}{x_F^2} + \cdots\right) & x_F >> 1 \end{cases} \tag{9.24}$$

白矮星的总质量

$$M = m_e N + 4 m_p \frac{N}{2} \approx 2 m_p N \tag{9.25}$$

其中假设氦核中两个中子的质量与两个质子相同。白矮星的半径

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} \tag{9.26}$$

因此

$$v \equiv \frac{V}{N} = \frac{8\pi}{3} \frac{m_p R^3}{M} \tag{9.27}$$

从而

$$x_F \equiv \frac{p_F}{m_e c} = \frac{\hbar}{m_e c R} \left(\frac{9\pi M}{8 m_p}\right)^{1/3} \equiv \frac{\bar{M}^{1/3}}{\bar{R}} \tag{9.28}$$

其中定义

$$\begin{aligned} \bar{M} &\equiv \frac{9\pi}{8} \frac{M}{m_p} \\ \bar{R} &\equiv \frac{R m_e c}{\hbar} \end{aligned} \tag{9.29}$$

由费米气体产生的压强是

$$P_0 = -\frac{\partial E_0}{\partial V} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{3} x_F^3 \sqrt{1+x_F^2} - f\left(x_F\right)\right) \tag{9.30}$$

（1）非相对论极限 $x_F << 1$下，

$$P_0 = \left(\frac{m_e^4 c^5}{15 \pi^2 \hbar^3}\right) x_F^5 = \frac{4}{5} K \frac{\bar{M}^{5/3}}{\bar{R}^5} \tag{9.31}$$

（2）极端相对论极限 $x_F >> 1$下，

$$P_0=\left(\frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2\hbar^3}\right)\left(x_F^4-x_F^2\right)=K\left(\frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4}-\frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2}\right) \tag{9.32}$$

其中

$$K\equiv\frac{m_e c^2}{12\pi^2}\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3 \tag{9.33}$$

白矮星的平衡条件是引力与压强对应的功达到平衡：

$$-\frac{\alpha\gamma M^2}{R}=\int_\infty^R P_0 4\pi r^2 \mathrm{d}r \tag{9.34}$$

对 R 进行微分得到平衡条件

$$P_0=\frac{\alpha\gamma M^2}{4\pi R^4}=K'\frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} \tag{9.35}$$

其中

$$K'=\frac{\alpha\gamma}{4\pi}\left(\frac{8m_p}{9\pi}\right)^2\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^4 \tag{9.36}$$

把 P_0 的值式(9.31)和(9.32)代入，得到

（1）非相对论极限 $x_F<<1$ 下（对应于低密度电子气体），平衡条件变为

$$\frac{4}{5}K\frac{\bar{M}^{5/3}}{\bar{R}^5}=K'\frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} \tag{9.37}$$

因此星的半径随着质量的增加而减少：

$$\bar{R}=\frac{4K}{5K'}\bar{M}^{-1/3} \tag{9.38}$$

（2）相对论极限 $x_F>>1$ 下（对应于高密度电子气体），平衡条件变为

$$K\left(\frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4}-\frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2}\right)=K'\frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} \tag{9.39}$$

因此半径

$$\bar{R}=\bar{M}^{2/3}\sqrt{1-\left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_0}\right)^{2/3}} \tag{9.40}$$

其中

$$\bar{M}_0=\left(\frac{K}{K'}\right)^{3/2}=\left(\frac{27\pi}{64\alpha}\right)^{3/2}\left(\frac{\hbar c}{\gamma m_{\mathrm{p}}^2}\right)^{3/2} \tag{9.41}$$

由式(9.40)被开方的数值不能为负得到约束条件

$$\bar{M}\le\bar{M}_0 \tag{9.42}$$

由 $\dfrac{\hbar c}{\gamma m_{\mathrm{p}}^2}\approx 10^{39}$，并取 $\alpha\approx 1$，估算得到

$$M_0=\frac{8}{9\pi}m_{\mathrm{p}}\bar{M}_0\approx 10^{30}\ \mathrm{kg}\sim\text{太阳质量} \tag{9.43}$$

这一理论推导预言**白矮星的质量不能超过 M_0，否则泡利原理引起的压强不足以对抗引力而导致塌缩**。更精确的计算表明 M_0 为 1.4 倍的太阳质量，这一结论已被天文观察所证实。

9.3. 朗道正常费米液体理论

自然界中只有液 He^3 是真正意义上的量子费米液体，有时也将相互作用的简并性费米体系称为量子费米液体，例如金属中的电子气等。有相互作用的粒子体系难于确定系统能级，因为此时单个粒子的能级失去意义。但在足够低的温度下，只需考虑在基态附近的弱激发。

宏观物体的弱激发可以看成是一类元激发（具有一定能量和动量的准粒子）的集合。量子费米液体具有类似于理想费米气体的能谱结构：基态对应于费米球内的所有单粒子态被粒子占据，而其激发态则对应于有粒子跃迁到费米球外，占据 $p>p_{\mathrm{F}}$ 的态。

为了构造费米液体的能谱，朗道假定原子之间的相互作用渐近地（绝热地）加入到系统中，此时系统中能级的类型不发生改变。即当系统从理想费米气体通过逐渐加强相互作用过渡到液体时，系统的能级类型不发生改变，改变的只是原来的气体粒子被元激发（准粒子）所取代，它的数目等于原来原子的数目，并且遵守费米—狄拉克统计。

9.3.1. 费米型准粒子的物理性质

（a）**能量**：液体总能量 U 并不简单等于各个准粒子能量，而是准粒子动量分布函数 $n(\mathbf{p})$ 的泛函。准粒子能量 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 也与 $n(\mathbf{p})$ 有关。因为不考虑自旋时，分布函数的无穷小变化会引起总能量变化

$$\delta\left(\frac{U}{V}\right)=\int\varepsilon(\mathbf{p})\delta n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3p}{h^3} \tag{9.44}$$

因此有

$$\varepsilon(\mathbf{p})=\frac{\partial\left(\delta\dfrac{U}{V}\right)}{\partial\left(\delta n(\mathbf{p})\right)} \tag{9.45}$$

而$n(\mathbf{p})$的归一化条件给出

$$\frac{N}{V}=\int n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} \tag{9.46}$$

（b）**自旋：**可以认为准粒子的自旋总是 1/2。考虑自旋时，准粒子分布函数算符成为厄米矩阵：

$$\hat{n}(\mathbf{p})=\begin{pmatrix} n_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) & n_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \\ n_{\beta\alpha}(\mathbf{p}) & n_{\beta\beta}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \tag{9.47}$$

其中$\alpha=1/2$，$\beta=-1/2$。准粒子数为

$$\frac{N}{V}=\mathrm{tr}\int \hat{n}\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3}=\int\left(n_{\alpha\alpha}+n_{\beta\beta}\right)\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} \tag{9.48}$$

总能量算符为

$$\delta\left(\frac{\hat{U}}{V}\right)=\mathrm{tr}\int \hat{\varepsilon}\delta\hat{n}\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3}=\int\sum_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\delta n\right)_{\beta\alpha}\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} \tag{9.49}$$

如果分布函数和能量均与自旋无关，则$n_{\alpha\beta}$和$\varepsilon_{\alpha\beta}$都退化为常数矩阵，因而有

$$\begin{aligned} \frac{N}{V}&=2\int n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} \\ \delta\left(\frac{U}{V}\right)&=2\int \varepsilon(\mathbf{p})\delta n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} \end{aligned} \tag{9.50}$$

所以考虑自旋自由度时，需要乘上自旋引起的简并度$g=2s+1$。

（c）**分布函数**：由于假设液体的能级和费米气体具有相同类型，因此准粒子的分布函数可以参考独立粒子系统费米—狄拉克统计的推导方法（杨展如第 22-26 页），由熵

$$S=-V\mathrm{tr}\int\left(\hat{n}\ln\hat{n}-\left(1-\hat{n}\right)\ln\left(1-\hat{n}\right)\right)\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} \tag{9.51}$$

及粒子数和总能量守恒两个约束条件

$$\delta\left(\frac{N}{V}\right)=\mathrm{tr}\int\delta\hat{n}\frac{\mathrm{d}^3p}{h^3}=0$$
$$\delta\left(\frac{E}{V}\right)=\mathrm{tr}\int\hat{\varepsilon}\delta\hat{n}\frac{\mathrm{d}^3p}{h^3}=0 \tag{9.52}$$

可以求得

$$\hat{n}=\frac{1}{\exp\left(\beta\left(\hat{\varepsilon}-\mu\right)\right)+1} \tag{9.53}$$

其中 μ 是液体的化学势。当准粒子的能量与自旋无关时，写为

$$n=\frac{1}{\exp\left(\beta\left(\varepsilon-\mu\right)\right)+1} \tag{9.54}$$

在绝对零度时，化学势就是费米球表面的能量

$$\mu\left(T=0\right)=\varepsilon_{\mathrm{F}} \tag{9.55}$$

注意虽然准粒子的分布函数形式上与通常的费米—狄拉克分布相同，但是因为 ε 是 n 的泛函，所以是一个隐含 n 的自洽表达式。

动量分布函数为阶跃函数：

$$\theta\left(p\right)=\begin{cases}1 & p<p_{\mathrm{F}}\\ 0 & p\geq p_{\mathrm{F}}\end{cases} \tag{9.56}$$

（d）**动量**：朗道假设准粒子具有确定的动量。假设成立的条件是动量的不确定性不仅与动量值相比非常小，而且与分布的“跃迁区”的宽度相比也很小。这里的“跃迁区”指的是在在费米面附近准粒子能够发生相互散射而产生运动的区域。这一假设在 $T\to 0\ \mathrm{K}$ 时可以得到满足。

（e）**有效质量**：参考理想费米气体，定义准粒子的有效质量为

$$m^*=\frac{p_{\mathrm{F}}}{v_{\mathrm{F}}} \tag{9.57}$$

其中准粒子的速度

$$v_{\mathrm{F}}=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_{p_{\mathrm{F}}} \tag{9.58}$$

（f）**准粒子与空穴**：元激发看作由激发到费米球外的准粒子和在费米球内相应产生的空穴组成，能量分别为 $\varepsilon=v_{\mathrm{F}}\left(p-p_{\mathrm{F}}\right)$ 和 $\varepsilon=v_{\mathrm{F}}\left(p_{\mathrm{F}}-p\right)$。因为元激发数目不固定，所以化学势为零，它们的统计分布为

$$n=\frac{1}{\exp(\beta\varepsilon)+1} \tag{9.59}$$

9.3.2．费米型准粒子的相互作用

当系统处于接近零的有限低温时，准粒子的分布对阶跃分布函数产生微小偏移，能量大致遵从线性关系

$$\delta\varepsilon(\mathbf{p})=\varepsilon(\mathbf{p})-\varepsilon^0(\mathbf{p})=\int f(\mathbf{p},\mathbf{p}')\delta n(\mathbf{p}')\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} \tag{9.60}$$

其中$\varepsilon^0(\mathbf{p})$是阶跃分布函数对应的准粒子能量，$f(\mathbf{p},\mathbf{p}')$是总能量的二阶导数。体系的能量变化

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{E}{V}\right)&=\int\varepsilon(\mathbf{p})\delta n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3}\\&=\int\varepsilon^0(\mathbf{p})\delta n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3}+\frac{1}{2}\iint f(\mathbf{p},\mathbf{p}')\delta n(\mathbf{p})\delta n(\mathbf{p}')\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3}\frac{\mathrm{d}^3 p'}{h^3}\end{aligned} \tag{9.61}$$

第一项可以理解为无相互作用的准粒子的贡献，第二项来自粒子间的相互作用。

以下求准粒子的有效质量m^*与相互作用函数$f(\mathbf{p},\mathbf{p}')$之间的关系。如果分布函数及能量均与自旋无关，则因为准粒子速度为$\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}$，可以得到准粒子的数通量

$$\int n\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} \tag{9.62}$$

由于已经假设液体中准粒子数目等于真实粒子数目，二者的数通量应该相等，而真实粒子的总质量迁移就等于质量乘以数通量：

$$\int\mathbf{p}n\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3}=\int mn\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\right)\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} \tag{9.63}$$

对$n(\mathbf{p})$求变分，并把式(9.60)代入上式，得

$$\int\mathbf{p}\delta n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3}=m\int\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3}+m\iint\frac{\partial f(\mathbf{p},\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}}n(\mathbf{p})\delta n(\mathbf{p}')\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3}\frac{\mathrm{d}^3 p'}{h^3} \tag{9.64}$$

右边第二项交换$\mathbf{p}$和$\mathbf{p}'$，利用$f(\mathbf{p},\mathbf{p}')=f(\mathbf{p}',\mathbf{p})$，并进行分部积分，得到

$$\int \mathbf{p}\delta n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} = m\int\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3} - m\iint f(\mathbf{p},\mathbf{p}')\frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}'}\delta n(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}^3 p}{h^3}\frac{\mathrm{d}^3 p'}{h^3}$$

(9.65)

因此有

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} - \int f(\mathbf{p},\mathbf{p}')\frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}'}\frac{\mathrm{d}^3 p'}{h^3} \tag{9.66}$$

右边的$n(\mathbf{p}')$近似取为阶跃函数$\theta(\mathbf{p}')$，则

$$\frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}'} = \frac{\partial\theta(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}'} = -\frac{\mathbf{p}'}{p'}\delta(p' - p_{\mathrm{F}}) \tag{9.67}$$

把(9.67)、(9.57)和(9.58)代入式(9.66)，得到

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{p_{\mathrm{F}}}{m^*}\frac{\mathbf{p}}{p} + \int f(\mathbf{p},\mathbf{p}')\frac{\mathbf{p}'}{p'}\delta(p' - p_{\mathrm{F}})\frac{\mathrm{d}^3 p'}{h^3} \tag{9.68}$$

由球坐标系

$$\frac{\mathrm{d}^3 p'}{h^3} = \frac{2}{h^3}p'^2 dp' \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \tag{9.69}$$

其中因子 2 来自于自旋简并，同时令$p = p_{\mathrm{F}}$并用$\mathbf{p}_{\mathrm{F}}$点乘式(9.68)，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} &= \frac{1}{m^*} + \frac{2}{p_{\mathrm{F}}h^3}\iint f(\theta)(\mathbf{p}_{\mathrm{F}}\cdot\mathbf{p}'_{\mathrm{F}})\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{m^*} + \frac{2p_{\mathrm{F}}}{h^3}\iint f(\theta)\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{9.70}$$

其中已经把相互作用函数f的自变量由$\mathbf{p}_{\mathrm{F}}$和$\mathbf{p}'_{\mathrm{F}}$变成它们之间的夹角θ。这就是相互作用函数f与有效质量m^*之间的关系。用m^*代替真实费米粒子的质量m，就可以仿照理想费米气体的公式求得系统的热力学量。

9.3.3. 零声

费米液体的非平衡过程的分布函数$n(\mathbf{p},\mathbf{r},t)$满足输运方程

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial\mathbf{p}}\cdot\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t} \tag{9.71}$$

对于近平衡分布，分布函数

$$n(\mathbf{p},\mathbf{r},t) = n_0(\mathbf{p}) + \delta n(\mathbf{p},\mathbf{r},t) \tag{9.72}$$

其中$n_0(\mathbf{p})$是平衡态的分布函数。准粒子能量可以写为

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon \tag{9.73}$$

其中ε_0是平衡态的能量，而

$$\delta\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{r},t) = \int f(\mathbf{p},\mathbf{p}')\delta n(\mathbf{p}',\mathbf{r},t)\frac{\mathrm{d}^3 p'}{h^3} \tag{9.74}$$

假定不存在外磁场，因而ε_0和n_0均与自旋无关，计入自旋简并的因子 2，得到

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial(\delta\varepsilon)}{\partial\mathbf{r}} = 2\int f(\mathbf{p},\mathbf{p}')\frac{\partial\left(\delta n(\mathbf{p}',\mathbf{r},t)\right)}{\partial\mathbf{r}}\frac{\mathrm{d}^3 p'}{h^3} \tag{9.75}$$

由经典力学，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} &= \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\\ \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t} &= -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{r}}\end{aligned} \tag{9.76}$$

精确到δn的一阶小量，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} &= \frac{\partial(n_0+\delta n)}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\partial(\delta n)}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\mathbf{p}}\\ \frac{\partial n}{\partial\mathbf{p}}\cdot\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t} &= \frac{\partial(n_0+\delta n)}{\partial\mathbf{p}}\cdot\left(-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{r}}\right) = -\frac{\partial(\delta\varepsilon)}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}}\end{aligned} \tag{9.77}$$

把式(9.77)代入式(9.71)，得到

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} + \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\mathbf{p}}\cdot\frac{\partial(\delta n)}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial(\delta\varepsilon)}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}} \tag{9.78}$$

因为上式的导出用到了经典哈密顿方程，所以已经假定准粒子的运动是经典的，因而上式适用的条件为系统满足以下两个准经典运动条件：

（1）准粒子在费米面附近的德布罗意波长$\hbar / p_{\mathrm{F}}$远小于粒子数分布发生显著变化区域的线性长度$L = 1/k$，即

$$\hbar k << p_{\mathrm{F}} \tag{9.79}$$

（2）准粒子能量由于碰撞产生的不确定性小于$\hbar\omega$，其中ω是分布函数变化的频率。该条件的等价条件是

$$\hbar\omega << \varepsilon_{\mathrm{F}} \tag{9.80}$$

费米液体中振动波的传播与$\omega\tau$有关，$\tau \propto \beta^2$是准粒子的平均自由时间。

（1） 当$\omega\tau << 1$时，准粒子平均自由程很短，碰撞频繁，波的传播可以近似看作准静态过程，由此可根据热力学理论求出声速，就是通常在液体中传播的声波，称为**第一声**。

（2） 当$\omega\tau >> 1$时，准粒子的碰撞变得不重要，可以认为振动过程出现在零温下，因此这些振动波称为**零声**。此时式(9.78)左边对应的碰撞积分$I\left(n\right)=\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}\approx 0$，所以有

$$\frac{\partial\left(\delta n\right)}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\left(\delta n\right)}{\partial \mathbf{r}}-\frac{\partial\left(\delta \varepsilon\right)}{\partial \mathbf{r}}\cdot\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}}=0 \tag{9.81}$$

其中$\mathbf{v}=\dfrac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}}$是准粒子速度。假定上式的解形式为

$$\delta n=\delta\left(\varepsilon-\varepsilon_{\mathrm{F}}\right)\nu\left(\mathbf{e}\right)\exp\left(i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)-\omega t\right) \tag{9.82}$$

其中$\mathbf{e}$是沿$\mathbf{p}$方向的单位矢量，$\nu\left(\mathbf{e}\right)$是待求的未知函数。把式(9.75)和(9.82)代入式(9.81)，得到

$$\left(\omega-v_{\mathrm{F}}\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}\right)\nu\left(\mathbf{e}\right)=2\left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}\right)v_{\mathrm{F}}\int f\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)\delta\left(\varepsilon'-\varepsilon_{\mathrm{F}}\right)\nu\left(\mathbf{e}'\right)\frac{\mathrm{d}^3 p'}{h^3} \tag{9.83}$$

当$T=0\,\mathrm{K}$时，平衡分布函数n_0是阶跃函数，导数为

$$\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}}=-\mathbf{e}\delta\left(p-p_{\mathrm{F}}\right) \tag{9.84}$$

另外又有

$$\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}}=\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}=-\mathbf{v}\delta\left(\varepsilon-\varepsilon_{\mathrm{F}}\right) \tag{9.85}$$

两式比较，得

$$\delta\left(\varepsilon'-\varepsilon_{\mathrm{F}}\right)=\frac{1}{v_{\mathrm{F}}}\delta\left(p'-p_{\mathrm{F}}\right) \tag{9.86}$$

把上式代入式(9.83)，得到

$$\begin{aligned}\left(\omega-v_{\mathrm{F}}\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}\right)\nu\left(\mathbf{e}\right)&=\frac{2\left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}\right)}{h^3}\int f\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)\delta\left(p'-p_{\mathrm{F}}\right)\nu\left(\mathbf{e}'\right)p'^2\sin\theta dp' d\theta d\phi\\&=\frac{2\left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}\right)p_{\mathrm{F}}^2}{h^3}\int f\left(\theta\right)\nu\left(\mathbf{e}'\right)\sin\theta d\theta d\phi\end{aligned} \tag{9.87}$$

其中作了变量代换 $f(\mathbf{p},\mathbf{p}')=f(\theta)$，$\theta$ 是 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}'$ 之间的夹角。取 $\mathbf{k}$ 为极轴，令波的传播速度为 $u_0=\omega/k$，引入记号 $S=u_0/v_{\mathrm{F}}$，上式成为

$$(S-\cos\theta)\nu(\theta,\phi)=\cos\theta\int F(\theta)\nu(\theta',\phi')\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{4\pi} \tag{9.88}$$

其中

$$F(\theta)\equiv\frac{m^* p_{\mathrm{F}}}{\pi^2\hbar^3}f(\theta),\quad m^*=\frac{p_{\mathrm{F}}}{v_{\mathrm{F}}} \tag{9.89}$$

由上式可以求得波的传播速度 u_0 和函数 $\nu(\mathbf{e})$。

以下讨论特别简单的情况：$F(\theta)=F_0$ 是常数。此时式(9.88)右边积分与 θ 和 ϕ 无关，ν 的解的形式为

$$\nu=c_0\frac{\cos\theta}{S-\cos\theta} \tag{9.90}$$

其中 c_0 为常数。代入并积分，最终得到

$$\frac{1}{2}S\ln\frac{S+1}{S-1}-1=\frac{1}{F_0} \tag{9.91}$$

当 S 从 1 变到无穷大时，上式左边恒为正值，所以**零声波能够存在的条件是** $F_0>0$。

由上式可知，当 $F_0\to 0$ 时，$S\to 1$，因而**零声传播的声速** $u_0=v_{\mathrm{F}}$，与通常声波的声速 $u=\frac{1}{\sqrt{3}}v_{\mathrm{F}}$ 有明显差别。因此在绝对零度时，费米液体中存在零声波传播，说明存在具有动量 $\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$ 和能量 $\varepsilon=\hbar\omega=u_0 p$ 的元激发，对应于“零声量子”。零声和第一声都是玻色型元激发（集体激发），遵从玻色—爱因斯坦统计，但是它们对热力学量引起的修正远小于费米液体的准粒子引起的修正。

实验表明，将朗道理论应用于液 ^{3}He 时，当温度在 100 mK 到 3 mK 之间与实验符合得很好，低于 3 mK 时出现超流现象，朗道的正常费米液体理论不再适用。

9.4. 具有排斥势的简并近理想费米气体

可以作为近理想费米系统处理的条件是：分子的力程 r_0 比粒子间的平均距离 $l\sim\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$

小得多。由于在简并费米气体中，

$$\frac{N}{V}=2\left(\frac{4\pi p_{\mathrm{F}}^3}{3h^3}\right)=\frac{p_{\mathrm{F}}^3}{3\pi^2\hbar^3} \tag{9.92}$$

所以上述条件可以写为

$$\frac{p}{\hbar}r_0<<1 \tag{9.93}$$

设 N 个自旋为 $\sigma=\pm\frac{1}{2}$ 的费米子间有排斥势，且与自旋无关，系统哈密顿量可以写为

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}u\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right)=\hat{H}_0+\hat{H}_1 \tag{9.94}$$

转换到二次量子化的动量表象中为

$$\hat{H}=\sum_{\mathbf{p},\sigma}\frac{p^2}{2m}\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{\mathbf{p}_1\sigma_1,\mathbf{p}_2\sigma_2\\ \mathbf{p}_1'\sigma_1',\mathbf{p}_2'\sigma_2'}}\left\langle\mathbf{p}_1'\sigma_1',\mathbf{p}_2'\sigma_2'\left|u\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right)\right|\mathbf{p}_1\sigma_1,\mathbf{p}_2\sigma_2\right\rangle\hat{a}_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}_2'\sigma_2'}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}_2\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{p}_1\sigma_1} \tag{9.95}$$

产生和湮灭算符对应的单粒子态为

$$\varphi_{\mathbf{p}\sigma}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{V}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)\eta_\sigma \tag{9.96}$$

其中 $\mathbf{p}\equiv\mathbf{p}_2'-\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1'$，$\mathbf{r}\equiv\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$，$\eta_{+1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_{-1}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$。产生和湮灭算符遵从费米反对易规则

$$\begin{aligned}&\left\{\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma},\hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}^{+}\right\}_{+}\equiv\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}^{+}+\hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}=\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\delta_{\sigma,\sigma'}\\&\left\{\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma},\hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}\right\}_{+}=\left\{\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^{+},\hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}^{+}\right\}_{+}=0\end{aligned} \tag{9.97}$$

因而有

$$\begin{aligned}&\left\langle\mathbf{p}_1'\sigma_1',\mathbf{p}_2'\sigma_2'\left|u\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right)\right|\mathbf{p}_1\sigma_1,\mathbf{p}_2\sigma_2\right\rangle\\&=\frac{1}{V^2}\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_1\right)\cdot\mathbf{r}_1\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{p}_2\right)\cdot\mathbf{r}_2\right)u\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right)\mathrm{d}^3r_1\mathrm{d}^3r_2\\&=\frac{1}{V}\int\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)u\left(\mathbf{r}\right)\mathrm{d}^3r\end{aligned} \tag{9.98}$$

在低温下，系统只涉及低能散射，因而可以应用波恩近似，并将式(9.95)中的散射矩阵元用以下近似取代：

$$\left\langle\mathbf{p}_1'\sigma_1',\mathbf{p}_2'\sigma_2'\left|u\right|\mathbf{p}_1\sigma_1,\mathbf{p}_2\sigma_2\right\rangle\to\left\langle0\sigma_1',0\sigma_2'\left|u\right|0\sigma_1,0\sigma_2\right\rangle \tag{9.99}$$

由泡利不相容原理，上式中$\sigma_1=\sigma_2$和$\sigma_1'=\sigma_2'$的项均为零，所以哈密顿量变成

$$\hat{H}=\sum_{\mathbf{p},\sigma}\frac{p^2}{2m}\hat{a}^+_{\mathbf{p},\sigma}\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}+\frac{u_0}{V}\sum_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_2'}\hat{a}^+_{\mathbf{p}_1'\uparrow}\hat{a}^+_{\mathbf{p}_2'\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}_2\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}_1\uparrow} \tag{9.100}$$

其中由式(9.98)得到

$$\frac{u_0}{V}\equiv\left\langle 0\uparrow,0\downarrow\middle|u\middle|0\uparrow,0\downarrow\right\rangle=\frac{1}{V}\int u(\mathbf{r})\mathrm{d}^3r \tag{9.101}$$

可以证明（杨展如第 185—186 页）u_0可以用低能散射长度a表示为

$$u_0=\frac{4\pi a\hbar^2}{m}\left[1-\frac{16\pi a\hbar^2}{V}\sum\frac{\delta\left(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'\right)}{p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2}\right] \tag{9.102}$$

根据哈密顿量式(9.100)，设$\hat{H}_0$的本征矢为$\left|n\right\rangle=\left|n_{\mathbf{p}_1\sigma_1},n_{\mathbf{p}_2\sigma_2},\cdots\right\rangle$，则由量子微扰论可以求得精确至$a$的二级修正下的**本征能量**为

$$\begin{aligned}&E_n=E_n^{(0)}+E_n^{(1)}+E_n^{(2)}\\&=\sum_{\mathbf{p}\sigma}\frac{p^2}{2m}n_{\mathbf{p}\sigma}+\frac{4\pi a\hbar^2}{mV}\sum_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}n_{p_1\uparrow}n_{p_2\downarrow}-\\&4m\left(\frac{4\pi a\hbar^2}{mV}\right)^2\sum_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_2'}\frac{\delta\left(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'\right)}{p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2}n_{p_1\uparrow}n_{p_2\downarrow}\left(n_{p_1'\uparrow}+n_{p_2'\downarrow}\right)\end{aligned} \tag{9.103}$$

近似使用理想费米气体的分布函数

$$n^0_{p\sigma}(T=0)=\begin{cases}1 & P<P_{\mathrm{F}}\\0 & P>P_{\mathrm{F}}\end{cases} \tag{9.104}$$

经过复杂的积分求解，可以得到**基态能量**

$$\begin{aligned}&E_0=\frac{3\hbar^2}{10m}\left(3\pi^2n\right)^{2/3}N+\\&\frac{\pi a\hbar^2}{m}nN\left(1+\frac{6}{35}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{1/3}a\left(11-2\ln 2\right)\right)\end{aligned} \tag{9.105}$$

其中$n=\dfrac{N}{V}$。在绝对零度时，气体的化学势可以由$\mu=\left(\dfrac{\partial E_0}{\partial N}\right)_V$求出，气体基态压强可以由$P_0=n^2\dfrac{\partial\left(E_0/N\right)}{\partial n}$求出。

以下求元激发对应的准粒子的相互作用函数 $f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)$。系统能量的变化量

$$\delta E=\sum_{\mathbf{p}\sigma}\varepsilon_\sigma(\mathbf{p})\delta n_{\mathbf{p}\sigma}+\frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{p}_1\sigma,\mathbf{p}_2\sigma'}f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)\delta n_{\mathbf{p}_1\sigma}\delta n_{\mathbf{p}_2\sigma'} \tag{9.106}$$

利用能量表达式(9.103)对 $n_{\mathbf{p}_1\sigma}$ 和 $n_{\mathbf{p}_2\sigma'}$ 求二阶泛函导数，并设 $|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=|\mathbf{p}_\mathrm{F}|$，把求和换成积分，可以得到

$$\begin{aligned}f_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)=f_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)=\frac{4\pi a\hbar^2}{m}-\frac{4m}{h^3}\left(\frac{4\pi a\hbar^2}{m}\right)^2\int\mathrm{d}^3p_1'\mathrm{d}^3p_2'\\ \left(\frac{\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2')}{2p_\mathrm{F}^2-p_1'^2-p_2'^2}+\frac{\delta(\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2')+\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2'-\mathbf{p}_2)}{2(p_1'^2-p_2'^2)}\right)\end{aligned} \tag{9.107}$$

和

$$\begin{aligned}f_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)=f_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)=\frac{2m}{h^3}\left(\frac{4\pi a\hbar^2}{m}\right)^2\int\mathrm{d}^3p_1'\mathrm{d}^3p_2'\\ \left(\frac{\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2')+\delta(\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2')}{p_1'^2-p_2'^2}\right)\end{aligned} \tag{9.108}$$

把以上两式代入式(9.70)即可求得准粒子的有效质量 m^*。