



## 理想费米气体

费米能（绝对零度时的化学势）

$$\varepsilon_F \equiv \mu(T=0) = \frac{1}{\beta} \ln z = \left( \frac{6\pi^2}{v} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}$$

考虑每个单粒子能级有  $g$  重简并，则

$$\varepsilon_F = \left( \frac{6\pi^2}{gv} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}$$

费米能的物理意义是：在绝对零度时，所有粒子从基态开始，依次占据最低能态，直至费米能  $\varepsilon_F$  时止。在动量空间中，粒子填充一个半径为  $p_F$  的球，球的表面成为**费米球**（最简单的费米面）。

$$p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F} = \hbar \left( \frac{6\pi^2}{gv} \right)^{1/3}$$

- 测量金属费米面的实验技术有磁阻效应、回旋共振等。
- 半导体和绝缘体用价带顶概念，计算化学用 HOMO, LUMO。

理想费米气体在有限低温下的热力学量见讲义。



## 白矮星的统计平衡

对白矮星的观察数据进行分析，形成了如下的理想化模型：由总质量  $M \approx 10^{33}$  g 的氦组成的密度为  $\rho \approx 10^7$  g/cm<sup>3</sup>、中心温度为  $T \approx 10^7$  K 的高密度球。高温使氦处于完全离化状态，因此可以视为  $N$  个处于基态的电子在  $\frac{N}{2}$  个不动的氦核背景中运动。这个系统所呈现的特性是泡利原理、相对论动力学和引力定律的联合效果。以下证明白矮星的质量不能超过某个临界质量  $M_0$ ，否则泡利原理引起的压强不足以对抗引力而导致塌缩。



## 朗道正常费米液体理论

自然界中只有液  $\text{He}^3$  是真正意义上的量子费米液体，有时也将相互作用的简并性费米体系称为量子费米液体，例如金属中的电子气等。有相互作用的粒子体系难于确定系统能级，因为此时单个粒子的能级失去意义。但在足够低的温度下，只需考虑在基态附近的弱激发。

宏观物体的弱激发可以看成是一类元激发（具有一定能量和动量的准粒子）的集合。量子费米液体具有类似于理想费米气体的能谱结构：基态对应于费米球内的所有单粒子态被粒子占据，而其激发态则对应于有粒子跃迁到费米球外，占据  $p > p_F$  的态。

为了构造费米液体的能谱，朗道假定原子之间的相互作用渐近地（绝热地）加入到系统中，此时系统中能级的类型不发生改变。即当系统从理想费米气体通过逐渐加强相互作用过渡到液体时，系统的能级类型不发生改变，改变的只是原来的气体粒子被元激发（准粒子）所取代，它的数目等于原来原子的数目，并且遵守费米—狄拉克统计。



## 费米型准粒子的物理性质

(a) **能量**: 液体总能量  $U$  并不简单等于各个准粒子能量, 而是准粒子动量分布函数  $n(\mathbf{p})$  的泛函。准粒子能量  $\varepsilon(\mathbf{p})$  也与  $n(\mathbf{p})$  有关。因为不考虑自旋时, 分布函数的无穷小变化会引起总能量变化

$$\delta\left(\frac{U}{V}\right) = \int \varepsilon(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} \quad (9.44)$$

因此有

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\partial\left(\delta\frac{U}{V}\right)}{\partial(\delta n(\mathbf{p}))} \quad (9.45)$$

而  $n(\mathbf{p})$  的归一化条件给出

$$\frac{N}{V} = \int n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} \quad (9.46)$$



(b) 自旋：可以认为准粒子的自旋总是  $1/2$ 。考虑自旋时，准粒子分布函数算符成为厄米矩阵：

$$\hat{n}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} n_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) & n_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \\ n_{\beta\alpha}(\mathbf{p}) & n_{\beta\beta}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (9.47)$$

其中  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = -1/2$ 。准粒子数为

$$\frac{N}{V} = \text{tr} \int \hat{n} \frac{d^3 p}{h^3} = \int (n_{\alpha\alpha} + n_{\beta\beta}) \frac{d^3 p}{h^3} \quad (9.48)$$

总能量算符为

$$\delta \left( \frac{\hat{U}}{V} \right) = \text{tr} \int \hat{\varepsilon} \delta \hat{n} \frac{d^3 p}{h^3} = \int \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} (\delta n)_{\beta\alpha} \frac{d^3 p}{h^3} \quad (9.49)$$

如果分布函数和能量均与自旋无关，则  $n_{\alpha\beta}$  和  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  都退化为常数矩阵，因而有

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= 2 \int n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} \\ \delta \left( \frac{U}{V} \right) &= 2 \int \varepsilon(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} \end{aligned} \quad (9.50)$$

所以考虑自旋自由度时，需要乘上自旋引起的简并度  $g = 2s + 1$ 。



(c) 分布函数：由于假设液体的能级和费米气体具有相同类型，因此准粒子的分布函数可以参考独立粒子系统费米—狄拉克统计的推导方法（杨展如第 22-26 页），由熵

$$S = -V \text{tr} \int \left( \hat{n} \ln \hat{n} - (1 - \hat{n}) \ln (1 - \hat{n}) \right) \frac{d^3 p}{h^3} \quad (9.51)$$

及粒子数和总能量守恒两个约束条件

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{N}{V} \right) &= \text{tr} \int \delta \hat{n} \frac{d^3 p}{h^3} = 0 \\ \delta \left( \frac{E}{V} \right) &= \text{tr} \int \varepsilon \delta \hat{n} \frac{d^3 p}{h^3} = 0 \end{aligned} \quad (9.52)$$

可以求得

$$\hat{n} = \frac{1}{\exp(\beta(\hat{\varepsilon} - \mu)) + 1} \quad (9.53)$$

其中  $\mu$  是液体的化学势。当准粒子的能量与自旋无关时，写为

$$n = \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon - \mu)) + 1} \quad (9.54)$$

在绝对零度时，化学势就是费米球表面的能量

$$\mu(T=0) = \varepsilon_F \quad (9.55)$$

注意虽然准粒子的分布函数形式上与通常的费米—狄拉克分布相同，但是因为  $\varepsilon$  是  $n$  的泛函，所以是一个隐含  $n$  的自洽表达式。

动量分布分布函数为阶跃函数：

$$\theta(p) = \begin{cases} 1 & p < p_F \\ 0 & p \geq p_F \end{cases} \quad (9.56)$$



(d) 动量：朗道假设准粒子具有确定的动量。这一假设在  $T \rightarrow 0 \text{ K}$  时可以满足。

(e) 有效质量：参考理想费米气体，定义准粒子的有效质量为

$$m^* = \frac{p_F}{v_F} \quad (9.57)$$

其中准粒子的速度

$$v_F = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_{p_F} \quad (9.58)$$

(f) 准粒子与空穴：元激发看作由激发到费米球外的准粒子和在费米球内相应产生的空穴组成，能量分别为  $\varepsilon = v_F (p - p_F)$  和  $\varepsilon = v_F (p_F - p)$ 。因为元激发数目不固定，所以化学势为零，它们的统计分布为

$$n = \frac{1}{\exp(\beta \varepsilon) + 1} \quad (9.59)$$



## 费米型准粒子的相互作用

当系统处于接近零的有限低温时，准粒子的分布对阶跃分布函数产生微小偏移，能量大致遵从线性关系

$$\delta\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon^0(\mathbf{p}) = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}') \frac{d^3 p'}{h^3} \quad (9.60)$$

其中  $\varepsilon^0(\mathbf{p})$  是阶跃分布函数对应的准粒子能量， $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  是总能量的二阶导数。体系的能量变化

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{E}{V}\right) &= \int \varepsilon(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} \\ &= \int \varepsilon^0(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} + \frac{1}{2} \iint f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}') \frac{d^3 p}{h^3} \frac{d^3 p'}{h^3} \end{aligned} \quad (9.61)$$

第一项可以理解为无相互作用的准粒子的贡献，第二项来自粒子间的相互作用。



以下求准粒子的有效质量  $m^*$  与相互作用函数  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  之间的关系。如果分布函数及能

量均与自旋无关，则因为准粒子速度为  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}$ ，可以得到准粒子的数通量

$$\int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{d^3 p}{h^3} \quad (9.62)$$

由于已经假设液体中准粒子数目等于真实粒子数目，二者的数通量应该相等，而真实粒子的总质量迁移就等于质量乘以数通量：

$$\int \mathbf{p} n \frac{d^3 p}{h^3} = \int m n \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d^3 p}{h^3} \quad (9.63)$$

对  $n(\mathbf{p})$  求变分，并把式(9.60)代入上式，得

$$\int \mathbf{p} \delta n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} = m \int \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} + m \iint \frac{\partial f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}} n(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}') \frac{d^3 p}{h^3} \frac{d^3 p'}{h^3} \quad (9.64)$$

右边第二项交换  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{p}'$ ，利用  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ ，并进行分部积分，得到

$$\int \mathbf{p} \delta n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} = m \int \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} - m \iint f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}'} \delta n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{h^3} \frac{d^3 p'}{h^3} \quad (9.65)$$



因此有

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}'} \frac{d^3 p'}{h^3} \quad (9.66)$$

右边的  $n(\mathbf{p}')$  近似取为阶跃函数  $\theta(\mathbf{p}')$ , 则

$$\frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}'} = \frac{\partial \theta(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}'} = -\frac{\mathbf{p}'}{p'} \delta(p' - p_F) \quad (9.67)$$

把(9.67)、(9.57)和(9.58)代入式(9.66), 得到

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{p_F}{m^*} \frac{\mathbf{p}}{p} + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\mathbf{p}'}{p'} \delta(p' - p_F) \frac{d^3 p'}{h^3} \quad (9.68)$$

由球坐标系

$$\frac{d^3 p'}{h^3} = \frac{2}{h^3} p'^2 dp' \sin \theta d\theta d\phi \quad (9.69)$$

其中因子 2 来自于自旋简并, 同时令  $p = p_F$  并用  $\mathbf{p}_F$  点乘式(9.68), 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= \frac{1}{m^*} + \frac{2}{p_F h^3} \iint f(\theta) (\mathbf{p}_F \cdot \mathbf{p}') \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{m^*} + \frac{2p_F}{h^3} \iint f(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (9.70)$$

其中已经把相互作用函数  $f$  的自变量由  $\mathbf{p}_F$  和  $\mathbf{p}'_F$  变成它们之间的夹角  $\theta$ 。这就是相互作用函

数  $f$  与有效质量  $m^*$  之间的关系。用  $m^*$  代替真实费米粒子的质量  $m$ , 就可以仿照理想费米气体的公式求得系统的热力学量。



## 零 声

费米液体的非平衡过程的分布函数  $n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  满足输运方程

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \quad (9.71)$$

得到

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial(\delta n)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial(\delta \varepsilon)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \quad (9.78)$$

- (1) 当  $\omega\tau \ll 1$  时, 准粒子平均自由程很短, 碰撞频繁, 波的传播可以近似看作准静态过程, 由此可根据热力学理论求出声速, 就是通常在液体中传播的声波, 称为第一声。
- (2) 当  $\omega\tau \gg 1$  时, 准粒子的碰撞变得不重要, 可以认为振动过程出现在零温下, 因此这些振动波称为零声。此时式(9.78)左边对应的碰撞积分  $I(n) = \frac{dn}{dt} \approx 0$ , 所以有

$$\frac{\partial(\delta n)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial(\delta n)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial(\delta \varepsilon)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (9.81)$$

其中  $\mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}}$  是准粒子速度。



其中作了变量代换  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f(\theta)$ ,  $\theta$  是  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{p}'$  之间的夹角。取  $\mathbf{k}$  为极轴, 令波的传播速度为  $u_0 = \omega/k$ , 引入记号  $S = u_0/v_F$ , 上式成为

$$(S - \cos \theta) v(\theta, \phi) = \cos \theta \int F(\theta) v(\theta', \phi') \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{4\pi} \quad (9.88)$$

其中

$$F(\theta) \equiv \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} f(\theta), \quad m^* = \frac{p_F}{v_F} \quad (9.89)$$

由上式可以求得波的传播速度  $u_0$  和函数  $v(\mathbf{e})$ 。



以下讨论特别简单的情况： $F(\theta) = F_0$  是常数。此时式(9.88)右边积分与  $\theta$  和  $\phi$  无关， $v$  的解的形式为

$$v = c_0 \frac{\cos \theta}{S - \cos \theta} \quad (9.90)$$

其中  $c_0$  为常数。代入并积分，最终得到

$$\frac{1}{2} S \ln \frac{S+1}{S-1} - 1 = \frac{1}{F_0} \quad (9.91)$$

当  $S$  从 1 变到无穷大时，上式左边恒为正值，所以零声波能够存在的条件是  $F_0 > 0$ 。

由上式可知，当  $F_0 \rightarrow 0$  时， $S \rightarrow 1$ ，因而零声传播的声速  $u_0 = v_F$ ，与通常声波的声速  $u = \frac{1}{\sqrt{3}} v_F$  有明显差别。因此在绝对零度时，费米液体中存在零声波传播，说明存在具有动量  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  和能量  $\varepsilon = \hbar \omega = u_0 p$  的元激发，对应于“零声量子”。零声和第一声都是玻色型元激发（集体激发），遵从玻色—爱因斯坦统计，但是它们对热力学量引起的修正远小于费米液体的准粒子引起的修正。

实验表明，将朗道理论应用于液  $^3\text{He}$  时，当温度在 100 mK 到 3 mK 之间与实验符合得很好，低于 3 mK 时出现超流现象，朗道的正常费米液体理论不再适用。



## 具有排斥势的简并非理想费米气体

可以作为近理想费米系统处理的条件是：分子的力程  $r_0$  比粒子间的平均距离  $l \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$  小得多。

上述条件可以写为

$$\frac{p}{\hbar} r_0 \ll 1$$



设  $N$  个自旋为  $\sigma = \pm \frac{1}{2}$  的费米子间有排斥势，且与自旋无关，系统哈密顿量可以写为

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (9.94)$$

转换到二次量子化的动量表象中为

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1 \sigma_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2 \\ \mathbf{p}_1 \sigma_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2}} \langle \mathbf{p}_1' \sigma_1', \mathbf{p}_2' \sigma_2' | u(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) | \mathbf{p}_1 \sigma_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2 \rangle \hat{a}_{\mathbf{p}_1 \sigma_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2 \sigma_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2 \sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1 \sigma_1} \quad (9.95)$$

产生和湮灭算符对应的单粒子态为

$$\varphi_{\mathbf{p}\sigma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) \eta_{\sigma} \quad (9.96)$$

其中  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1'$ ,  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\eta_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\eta_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。产生和湮灭算符遵从费米

反对易规则

$$\begin{aligned} \{\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}^+\}_+ &\equiv \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}^+ + \hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \delta_{\sigma, \sigma'} \\ \{\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}\}_+ &= \{\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+, \hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}^+\}_+ = 0 \end{aligned} \quad (9.97)$$

因而有

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{p}_1' \sigma_1', \mathbf{p}_2' \sigma_2' | u(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) | \mathbf{p}_1 \sigma_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2 \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{r}_1\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{r}_2\right) u(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 \quad (9.98) \\ &= \frac{1}{V} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) u(\mathbf{r}) d^3 r \end{aligned}$$

在低温下，系统只涉及低能散射，因而可以应用波恩近似，并将式(9.95)中的散射矩阵元用以下近似取代：

$$\langle \mathbf{p}_1' \sigma_1', \mathbf{p}_2' \sigma_2' | u | \mathbf{p}_1 \sigma_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2 \rangle \rightarrow \langle 0 \sigma_1', 0 \sigma_2' | u | 0 \sigma_1, 0 \sigma_2 \rangle \quad (9.99)$$



近似使用理想费米气体的分布函数

$$n_{p\sigma}^0(T=0) = \begin{cases} 1 & P < P_F \\ 0 & P > P_F \end{cases} \quad (9.104)$$

经过复杂的积分求解，可以得到基态能量

$$E_0 = \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2 n)^{2/3} N + \frac{\pi a \hbar^2}{m} n N \left( 1 + \frac{6}{35} \left( \frac{3n}{\pi} \right)^{1/3} a (11 - 2 \ln 2) \right) \quad (9.105)$$

其中  $n = \frac{N}{V}$ 。在绝对零度时，气体的化学势可以由  $\mu = \left( \frac{\partial E_0}{\partial N} \right)_V$  求出，气体基态压强可以由

$$P_0 = n^2 \frac{\partial (E_0 / N)}{\partial n} \text{ 求出。}$$



以下求元激发对应的准粒子的相互作用函数  $f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ 。系统能量的变化量

$$\delta E = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon_{\sigma}(\mathbf{p}) \delta n_{\mathbf{p}\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}_1\sigma, \mathbf{p}_2\sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \delta n_{\mathbf{p}_1\sigma} \delta n_{\mathbf{p}_2\sigma'} \quad (9.106)$$

利用能量表达式(9.103)对  $n_{\mathbf{p}_1\sigma}$  和  $n_{\mathbf{p}_2\sigma'}$  求二阶泛函导数, 并设  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_F|$ , 把求和换成积分, 可以得到

$$f_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{4\pi a\hbar^2}{m} - \frac{4m}{\hbar^3} \left( \frac{4\pi a\hbar^2}{m} \right)^2 \int d^3 p'_1 d^3 p'_2 \left( \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2)}{2p_F^2 - p_1'^2 - p_2'^2} + \frac{\delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2) + \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2)}{2(p_1'^2 - p_2'^2)} \right) \quad (9.107)$$

和

$$f_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{2m}{\hbar^3} \left( \frac{4\pi a\hbar^2}{m} \right)^2 \int d^3 p'_1 d^3 p'_2 \left( \frac{\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) + \delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2)}{p_1'^2 - p_2'^2} \right) \quad (9.108)$$

把以上两式代入式(9.70)即可求得准粒子的有效质量  $m^*$ 。



## 超 导

当非理想费米气体的粒子间存在吸引势时，费米面附近的一对动量、自旋相反的粒子能形成一种特殊的束缚态——库珀对（Cooper）对，使元激发能谱中出现能隙，形成超流相。最具有代表性的例子就是超导，即转变温度以下材料呈现零电阻和完全的抗磁性。超导体中的弱吸引力来自于电子—声子—电子相互作用。

当一个电子与晶格作用时，晶格会产生轻微的形变，使局部正电荷增多。此时接近的另一个自旋相反的电子收到形变晶格的作用，会与之前的电子形成有效吸引，结合成为库珀对。大量的库珀对形成玻色—爱因斯坦凝聚，集中到同一量子态，而其中的电子服从泡利不相容原理，所以要破坏一个电子或者一个库珀对，就需要抗衡整个体系的束缚能。因此在能隙之下，所有的库珀对以整体相干的方式进行传导运动，不出现电子的散射，因而形成零电阻。



## BCS 理论

设  $N$  个自旋为  $\sigma = \pm \frac{1}{2}$  的费米子组成的体系满足与排斥势情形相同的条件，动能处于

费米面两侧  $\Delta E$  范围内，自旋与动量均相反的一对粒子之间存在着弱吸引力，其它粒子的行为类似于理想气体。系统哈密顿量可以写为 **Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)** 约化哈密顿量：

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma} + \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}'\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}'\uparrow} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (10.1)$$

其中

$$V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \langle \mathbf{p}' \uparrow, -\mathbf{p}' \downarrow | \hat{V} | \mathbf{p} \uparrow, -\mathbf{p} \downarrow \rangle = \begin{cases} -V_0 & \left| \frac{p^2}{2m} - \mu \right| \leq \Delta E, \left| \frac{p'^2}{2m} - \mu \right| \leq \Delta E \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (10.2)$$

这个哈密顿量给出的物理图像是：只有在费米面附近两个具有相反的动量和自旋的粒子之间才有相互作用形成 **Cooper 对**。当粒子能量超过费米面以上  $\Delta E$  的范围就不再形成电子对，电子的激发成为单电子激发，系统不再呈现超导性。



在巨正则系综下，将算符写成平均值与涨落的形式：

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ &= \langle \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ \rangle + \Delta(\hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+) \\ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ &= \langle \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \rangle + \Delta(\hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+)\end{aligned}\quad (10.3)$$

代入哈密顿量表达式(10.2)，得到

$$\begin{aligned}\hat{H}_1 &= \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \langle \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ \rangle \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \\ &+ \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \langle \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \rangle \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow} \\ &- \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \langle \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} (\chi_{\mathbf{p}}^* \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ + \chi_{\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}) - \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \chi_{\mathbf{p}}^* \chi_{\mathbf{p}'}\end{aligned}\quad (10.4)$$

其中

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{p}}^* &= \langle \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+) \\ \chi_{\mathbf{p}'} &= \langle \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+) \\ \hat{\rho} &= \frac{\exp(-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N}))}{\text{tr}(\exp(-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})))} \\ \hat{N} &= \sum_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}\end{aligned}\quad (10.5)$$

因为  $\chi_{\mathbf{p}}^*$  和  $\chi_{\mathbf{p}'}$  的求解需要用到  $\hat{\rho}$ ，而  $\hat{\rho}$  的表达式中包含  $\hat{H}$ ， $\hat{H}$  的表达式中又包含  $\chi_{\mathbf{p}}^*$  和  $\chi_{\mathbf{p}'}$ ，所以这些量需要自洽求解。



令

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{p}} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \\ \Delta_{\mathbf{p}} &\equiv \sum_{\mathbf{p}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \chi_{\mathbf{p}'} \\ \Delta_{\mathbf{p}'}^* &\equiv \sum_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \chi_{\mathbf{p}}^*\end{aligned}\quad (10.6)$$

则

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= \hat{H} - \mu \hat{N} = (\hat{H}_0 - \mu \hat{N}) + \hat{H}_1 \\ &= \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \left( \varepsilon_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow} + \varepsilon_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow} + \Delta_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ + \Delta_{\mathbf{p}}^* \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow} \right) - \sum_{\mathbf{p}} \Delta_{\mathbf{p}}^* \chi_{\mathbf{p}} \\ &\equiv \sum_{\mathbf{p}} \hat{H}'_{\mathbf{p}} - \sum_{\mathbf{p}} \Delta_{\mathbf{p}}^* \chi_{\mathbf{p}}\end{aligned}\quad (10.7)$$

其中第二项为常数。引入博戈留波夫变换对该哈密顿量进行对角化：



$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{\mathbf{p}0} &= u_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow} - v_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ \\ \hat{\gamma}_{\mathbf{p}0}^+ &= u_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ - v_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow} \\ \hat{\gamma}_{\mathbf{p}1} &= u_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow} + v_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \\ \hat{\gamma}_{\mathbf{p}1}^+ &= u_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ + v_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}\end{aligned}\tag{10.8}$$

其中  $u_{\mathbf{p}}, v_{\mathbf{p}}$  为实数, 且  $u_{\mathbf{p}} = u_{-\mathbf{p}}$ ,  $v_{\mathbf{p}} = v_{-\mathbf{p}}$ 。它们是准粒子的产生和消灭算符, 因为每个动量有两个自旋态, 所以每个  $\mathbf{p}$  有两个产生算符及两个消灭算符。为了使新算符满足对易关系

$$\begin{aligned}\{\hat{\gamma}_{\mathbf{p}\alpha}, \hat{\gamma}_{\mathbf{p}'\alpha'}^+\} &= \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\alpha\alpha'} \\ \{\hat{\gamma}_{\mathbf{p}\alpha}^+, \hat{\gamma}_{\mathbf{p}'\alpha'}^+\} &= \{\hat{\gamma}_{\mathbf{p}\alpha}^+, \hat{\gamma}_{\mathbf{p}'\alpha'}\} = 0\end{aligned}\tag{10.9}$$

其中  $\alpha = 0$  或  $1$ , 必须有

$$u_{\mathbf{p}}^2 + v_{\mathbf{p}}^2 = 1\tag{10.10}$$



把逆变换

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow} &= u_{\mathbf{p}} \hat{\gamma}_{\mathbf{p}0} + v_{\mathbf{p}} \hat{\gamma}_{\mathbf{p}1}^+ \\ \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ &= u_{\mathbf{p}} \hat{\gamma}_{\mathbf{p}0}^+ + v_{\mathbf{p}} \hat{\gamma}_{\mathbf{p}1} \\ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow} &= u_{\mathbf{p}} \hat{\gamma}_{\mathbf{p}1} - v_{\mathbf{p}} \hat{\gamma}_{\mathbf{p}0}^+ \\ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ &= u_{\mathbf{p}} \hat{\gamma}_{\mathbf{p}1}^+ - v_{\mathbf{p}} \hat{\gamma}_{\mathbf{p}0}\end{aligned}\quad (10.11)$$

代入式(10.7), 得

$$\begin{aligned}\hat{H}'_{\mathbf{p}} &= \left( \varepsilon_{\mathbf{p}} (u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2) - (\Delta_{\mathbf{p}}^* + \Delta_{\mathbf{p}}) u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} \right) (\hat{\gamma}_{\mathbf{p}0}^+ \hat{\gamma}_{\mathbf{p}0} + \hat{\gamma}_{\mathbf{p}1}^+ \hat{\gamma}_{\mathbf{p}1}) \\ &+ \left( 2\varepsilon_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} + (\Delta_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}^2 - \Delta_{\mathbf{p}}^* v_{\mathbf{p}}^2) \right) \hat{\gamma}_{\mathbf{p}0}^+ \hat{\gamma}_{\mathbf{p}1}^+ \\ &+ \left( 2\varepsilon_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} + (\Delta_{\mathbf{p}}^* u_{\mathbf{p}}^2 - \Delta_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}^2) \right) \hat{\gamma}_{\mathbf{p}1} \hat{\gamma}_{\mathbf{p}0} \\ &+ \left( 2\varepsilon_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}^2 + (\Delta_{\mathbf{p}}^* + \Delta_{\mathbf{p}}) u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} \right)\end{aligned}\quad (10.12)$$

$\Delta_{\mathbf{p}}$  一般是复数, 但是讨论系统热力学性质时, 位相因子不重要, 可令其为实数, 即  $\Delta_{\mathbf{p}}^* = \Delta_{\mathbf{p}}$ 。

上式中第一项是对角化的, 第四项为常数, 使第二和第三项为零的条件是

$$2\varepsilon_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} + \Delta_{\mathbf{p}} (u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2) = 0 \quad (10.13)$$



和条件(10.10)联立并令

$$u_{\mathbf{p}} = \cos \chi_{\mathbf{p}}$$

$$v_{\mathbf{p}} = \sin \chi_{\mathbf{p}}$$

可以解得

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} \sin 2\chi_{\mathbf{p}} + \Delta_{\mathbf{p}} \cos 2\chi_{\mathbf{p}} = 0$$

$$\tan 2\chi_{\mathbf{p}} = -\Delta_{\mathbf{p}} / \varepsilon_{\mathbf{p}}$$

$$\cos 2\chi_{\mathbf{p}} = \frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\mathbf{p}}^2}} \quad (10.15)$$

$$\sin 2\chi_{\mathbf{p}} = \frac{-\Delta_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\mathbf{p}}^2}}$$

$$\sin^2 \chi_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\mathbf{p}}^2}} \right)$$

由这些结果可以把式(10.12)写成

$$\hat{H}' = E_0 + \sum_{\mathbf{p}\sigma} E_{\mathbf{p}} \hat{\gamma}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{\gamma}_{\mathbf{p}\sigma} \quad (10.16)$$

其中

$$\begin{aligned} E_0 &= \sum_{\mathbf{p}} (2\varepsilon_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}^2 + 2\Delta_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}) - \sum_{\mathbf{p}} \Delta_{\mathbf{p}} \chi_{\mathbf{p}} \\ &= -\sum_{\mathbf{p}} (E_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}}) - \sum_{\mathbf{p}} \Delta_{\mathbf{p}} \chi_{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (10.17)$$

是基态能量，并且元激发能谱

$$E_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} (u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2) - 2\Delta_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\mathbf{p}}^2} \quad (10.18)$$

当粒子处于基态时， $\varepsilon_{\mathbf{p}} = 0$ ，但此时元激发的能隙 $\Delta_{\mathbf{p}} \neq 0$ ，对应于破坏 Cooper 对的能量。

元激发的粒子数算符在无外场时与自旋无关，且服从费米统计，因此有

$$n_{\mathbf{p}} = \langle \hat{\gamma}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{\gamma}_{\mathbf{p}\sigma} \rangle = \frac{1}{\exp(\beta E_{\mathbf{p}}) + 1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \tanh \frac{\beta E_{\mathbf{p}}}{2} \right) \quad (10.19)$$



## 能隙方程

$$\langle \hat{\gamma}_{p0}^+ \hat{\gamma}_{p1}^+ \rangle = 0$$

$$\langle \hat{\gamma}_{p1} \hat{\gamma}_{p0} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \chi_p &= \langle \hat{a}_{-p\downarrow} \hat{a}_{p\uparrow} \rangle = \langle (u_p \hat{\gamma}_{p1} - v_p \hat{\gamma}_{p0}^+) (u_p \hat{\gamma}_{p0} + v_p \hat{\gamma}_{p1}^+) \rangle \\ &= u_p v_p \langle \hat{\gamma}_{p1} \hat{\gamma}_{p1}^+ \rangle - u_p v_p \langle \hat{\gamma}_{p0}^+ \hat{\gamma}_{p0} \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\Delta_p}{E_p} \tanh \frac{\beta E_p}{2} \end{aligned} \quad (10.21)$$

从而能隙函数

$$\begin{aligned} \Delta_p &= \sum_{p'} V_{pp'} \chi_{p'} = -\frac{1}{2} \sum_{p'} V_{pp'} \frac{\Delta_{p'}}{E_{p'}} \tanh \frac{\beta E_{p'}}{2} \\ &= \frac{V_0}{2} \sum_{p'} \frac{\Delta_{p'}}{\sqrt{\varepsilon_{p'}^2 + \Delta_{p'}^2}} \tanh \frac{\sqrt{\varepsilon_{p'}^2 + \Delta_{p'}^2}}{2k_B T} \end{aligned} \quad (10.22)$$

$\left| \frac{p'^2}{2m} - \mu \right| \leq \Delta E$

上式说明能隙函数除了求和条件外与  $\mathbf{p}$  不相关，因此可以写成分段函数

$$\Delta_p = \begin{cases} \Delta(T) & \left| \frac{p^2}{2m} - \mu \right| \leq \Delta E \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (10.23)$$

把式(10.23)代入式(10.22)，得

$$\frac{V_0}{2} \sum_p \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta^2(T)}} \tanh \frac{\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta^2(T)}}{2k_B T} = 1 \quad (10.24)$$



求和换成积分，得到

$$\frac{V_0}{2} \int_{-\Delta_F}^{\Delta_F} \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta^2(T)}\right)}{\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta^2(T)}} g(\varepsilon) d\varepsilon = V_0 \int_0^{\Delta_F} \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} g(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \quad (10.25)$$

其中  $N(\varepsilon)$  为能态密度。因为积分区域限制在费米面附近，所以可以近似地用费米面上的态密度来代替  $N(\varepsilon)$ ：

$$g(\varepsilon) \approx g_0 = \frac{mp_F}{\pi^2 \hbar^3} \quad (10.26)$$

从而得到 BCS 的能隙方程

$$g_0 V_0 \int_0^{\Delta_F} \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} d\varepsilon = 1 \quad (10.27)$$



当  $T \rightarrow 0 \text{ K}$  时有

$$\tanh \frac{E_k}{2k_B T} \rightarrow 1 \quad (10.28)$$

则

$$\begin{aligned} g_0 V_0 \int_0^{\Delta \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(0)}} d\varepsilon &\approx g_0 V_0 \sinh^{-1} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta(0)} = 1 \\ \Rightarrow \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta(0)} &= \sinh \left( \frac{1}{g_0 V_0} \right) \end{aligned} \quad (10.29)$$

当相互作用很弱时,  $g_0 V_0 \ll 1$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta(0)} &\approx \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{1}{g_0 V_0} \right) \\ \Rightarrow \Delta(0) &= 2\Delta \varepsilon \exp \left( -\frac{1}{g_0 V_0} \right) \end{aligned} \quad (10.30)$$

这就是绝对零度时的能隙。



## 临界温度与普适常数

由于在  $T > T_c$  时能谱将从元激发谱回到正常能谱，所以转变温度  $T_c$  处

$$\Delta(T_c) = 0 \quad (10.31)$$

利用这一点可以求出超导的临界温度，由式(10.27)可得

$$1 = g_0 V_0 \int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{\tanh\left(\frac{1}{2}\beta_c \varepsilon\right)}{\varepsilon} d\varepsilon = g_0 V_0 \int_0^{\frac{1}{2}\beta_c \Delta\varepsilon} \frac{\tanh x}{x} dx = g_0 V_0 \ln(1.13\beta_c \Delta\varepsilon) \quad (10.32)$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{1.13}{k_B} \Delta\varepsilon \exp\left(-\frac{1}{g_0 V_0}\right)$$

超导体的  $\Delta\varepsilon \sim \hbar\omega_D$ ，其中  $\omega_D$  是德拜频率，而  $\omega_D \sim 1/\sqrt{M}$ ，其中  $M$  是离子质量，所

以有  $T_c \sim 1/\sqrt{M}$ 。由式(10.30)和(10.32)得到与材料无关的普适常数

$$\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} = 1.77 \quad (10.33)$$



## 朗道抗磁性

在外磁场中的物质磁性的体现来自于两方面：(1) 电子自旋倾向于平行磁场方向排列，因而产生顺磁性；(2) 磁场中电子受洛伦兹力作用而产生圆周轨道运动，其运动轨道是量子化的，从而导致抗磁性。



## 朗道能级

外场中运动的单电子的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \mu_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \quad (10.34)$$

其中  $e$  是电子电量,  $c$  是光速,  $m$  是电子质量,  $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$  是玻尔磁子,  $\boldsymbol{\sigma}$  是泡利矩阵,  $\mathbf{A}$  是矢势。第一项与抗磁性有关, 第二项与顺磁性有关。为了讨论抗磁性, 只讨论第一项:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \quad (10.35)$$

设磁场  $H$  是均匀的且沿  $z$  轴, 将矢势选为

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0 \quad (10.36)$$

哈密顿量改写为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \left( p_x - \frac{eH}{c} y \right)^2 + p_y^2 + p_z^2 \right) \quad (10.37)$$

则波函数应有如下形式:

$$\psi(x, y, z) = \exp(i(k_x x + k_z z)) f(y) \quad (10.38)$$



代入薛定谔方程

$$\hat{H}\psi(x, y, z) = \varepsilon\psi(x, y, z) \quad (10.39)$$

得到  $f(y)$  满足的方程

$$\left( \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}(y - y_0)^2 \right) f(y) = \varepsilon' f(y) \quad (10.40)$$

其中

$$\omega_0 = \frac{eH}{mc}, \quad y_0 = \frac{\hbar c}{eH} k_x, \quad \varepsilon' = \varepsilon - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (10.41)$$



求解得到能量本征值为朗道能级

$$\varepsilon(p_z, j) = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega_0 \left( j + \frac{1}{2} \right) \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (10.42)$$

其中  $p_z = \hbar k_z$ 。因为上式与  $k_x$  无关，所以其简并度  $g$  应该等于  $k_x$  所有可能取值的数目。若

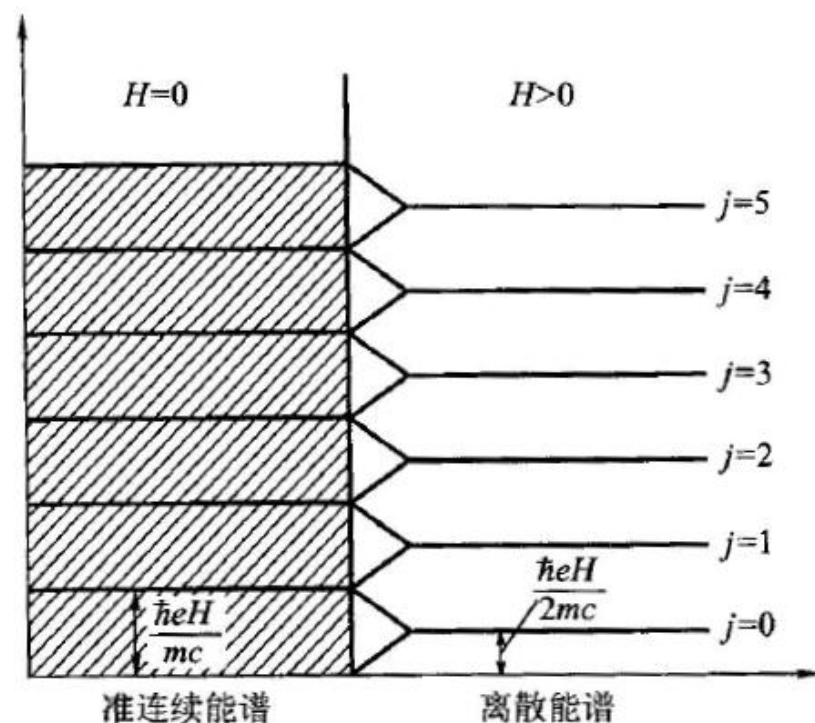
系统处于边长为  $L$  的立方体内，则  $k_x$  的允许值为  $\frac{2\pi n_x}{L}$ ,  $n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。为了保证

$y_0 \in [0, L]$ ,  $k_x$  可能取值的数目为

$$g = \frac{eH}{hc} L^2$$

两个能级的间距都是  $\hbar\omega_0 = \frac{\hbar eH}{mc}$ , 所以能级密度为

$$\frac{g}{\hbar\omega_0} = \frac{2\pi m L^2}{h^2}$$





## 高温磁化率

此费米系统的巨配分函数为

$$\Xi = \prod_{\lambda} (1 + z \exp(-\beta \varepsilon_{\lambda})) \quad (10.45)$$

其中  $\lambda$  代表量子数的集合,  $\lambda = \{p_z, j, \alpha\}$   $\alpha = 1, 2, \dots, g$ , 因此

$$\begin{aligned} \ln \Xi &= \sum_{\alpha=1}^g \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p_z} \ln(1 + z \exp(-\beta \varepsilon(p_z, j))) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{L}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z g \ln(1 + z \exp(-\beta \varepsilon(p_z, j))) \end{aligned} \quad (10.46)$$

平均粒子数

$$\langle \hat{N} \rangle = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi \bigg|_{V, T, H} = \frac{gL}{h} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{1}{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon(p_z, j)) + 1} \quad (10.47)$$

高温极限下, 为保证上式不发散, 要求  $z \rightarrow 0$ 。因此可以对式(10.46)进行泰勒展开保留到  $z$  的一次项:



$$\begin{aligned}\ln \Xi &\approx \frac{zgL}{h} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \exp \left( -\beta \left( \frac{p_z^2}{2m} + \hbar \omega_0 \left( j + \frac{1}{2} \right) \right) \right) \\ &= \frac{zgL}{\lambda} \frac{\exp(-x)}{1 - \exp(-2x)}\end{aligned}\quad (10.48)$$

其中  $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m}}$ ,  $x \equiv \frac{\hbar\omega_0\beta}{2}$ 。对  $x$  进行泰勒展开保留到三次项, 有

$$\begin{aligned}\frac{\exp(-x)}{1 - \exp(-2x)} &= \frac{1}{\exp(x) - \exp(-x)} \\ &\approx \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \left( 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \right)} \\ &= \frac{1}{2x \left( 1 + \frac{x^2}{6} \right)} \approx \frac{1}{2x} \left( 1 - \frac{x^2}{6} \right)\end{aligned}\quad (10.49)$$

所以

$$\ln \Xi = \frac{zgL}{\lambda} \frac{1}{2x} \left( 1 - \frac{x^2}{6} \right) = \frac{zV}{\lambda^3} \left( 1 - \frac{1}{24} (\hbar\omega_0\beta)^2 \right) \quad (10.50)$$



磁化强度

$$M = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{\ln \Xi}{V} \right) \bigg|_{z, V, T} = - \frac{z \beta}{3 \lambda^3} \left( \frac{\hbar e}{2mc} \right)^2 H \quad (10.51)$$

磁化率

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = - \frac{z \beta}{3 \lambda^3} \left( \frac{\hbar e}{2mc} \right)^2 \quad (10.52)$$

为了替代掉  $z$ ，式(10.50)中舍去  $\beta$  的高阶项，得

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi \bigg|_{V, T} = \frac{V z}{\lambda^3} \quad (10.53)$$

最终得到高温极限下的磁化率为

$$\chi = - \frac{\beta}{3v} \left( \frac{\hbar e}{2mc} \right)^2 < 0 \quad (10.54)$$

因此系统呈现的是抗磁性。



## 低温德哈斯—范阿尔芬效应

低温极限下，电子倾向于占据最低可能的能级。磁场减弱时，能级简并度  $g$  变小，每个朗道能级只能容纳较少的电子，迫使部分电子跳到更高能级，从而引起 **de Haas—Van Alphen** 效应，即随着磁场减弱，低温磁化率发生振荡。

令  $T \rightarrow 0 \text{ K}$ ，此时可以不考虑电子沿  $z$  方向的运动，问题变为在均匀磁场中处于面积为  $L^2$  的容器中的二维电子系统的基态能。此系统的朗道能级为

$$\varepsilon_j = \hbar \omega_0 \left( j + \frac{1}{2} \right) = 2\mu_0 H \left( j + \frac{1}{2} \right) \quad (10.55)$$

其中  $\mu_0 \equiv \frac{\hbar e}{2mc}$ ，简并度为

$$g = L^2 \left( \frac{eH}{hc} \right) = \frac{N}{n} \left( \frac{eH}{hc} \right) = \frac{NH}{H_0} \quad (10.56)$$

其中  $n = \frac{N}{L^2}$ ， $H_0 \equiv \frac{nhc}{e}$ 。



当  $H > H_0$  时,  $g > N$ , 这时所有电子都占据最低能级, 每个电子的能量为

$$\varepsilon_0 = 2\mu_0 H \left( \frac{1}{2} \right) = \mu_0 H \quad (10.57)$$

因而整个系统的基态能为

$$E_0 = N\varepsilon_0 = N\mu_0 H \quad (10.58)$$

当  $H < H_0$  时,  $g < N$ , 有些电子需要处于更高能级。设第  $j$  个能级以下被完全占据, 第  $j+1$  个能级被部分占据, 则有

$$g(j+1) < N < g(j+2) \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (10.59)$$

把式(10.56)代入上式, 得到

$$\frac{1}{j+2} < \frac{H}{H_0} = \frac{1}{j+1} \quad (10.60)$$

系统能量为

$$\begin{aligned} E_0 &= g \sum_{i=0}^j \varepsilon_i + (N - (j+1)g) \varepsilon_{j+1} \\ &= \mu_0 H [N(2j+3) - g(j+1)(j+2)] \\ &= N\mu_0 H \left[ (2j+3) - (j+1)(j+2) \frac{H}{H_0} \right] \end{aligned}$$



综合两种情况的结果，可以把基态能量写为

$$\frac{E_0}{N} = \begin{cases} \mu_0 H_0 x & x > 1 \\ \mu_0 H_0 x \left( (2j+3) - (j+1)(j+2)x \right) & \frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1}, j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (10.62)$$

当  $T \rightarrow 0 \text{ K}$  时,  $E_0 \approx \Omega = -\frac{1}{\beta} \ln \Xi$ , 由此可以求出单位体积的磁化强度和磁化率分别为

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \frac{\ln \Xi}{L^2} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \frac{\beta E_0}{L^2} \\ &= \begin{cases} -\mu_0 n & x > 1 \\ \mu_0 n \left( 2(j+1)(j+2)x - (2j+3) \right) & \frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1}, j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (10.63)$$

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\partial M}{\partial H} \\ &= \begin{cases} 0 & x > 1 \\ \frac{2\mu_0 n}{H_0} (j+1)(j+2) & \frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1}, j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (10.64)$$

这两个函数的图形（杨展如第 163 页图 5.3.2）显示出 de Haas—Van Alphen 效应，即二维费米气体在强磁场和低温下出现磁化强度符号突然改变的振荡现象。

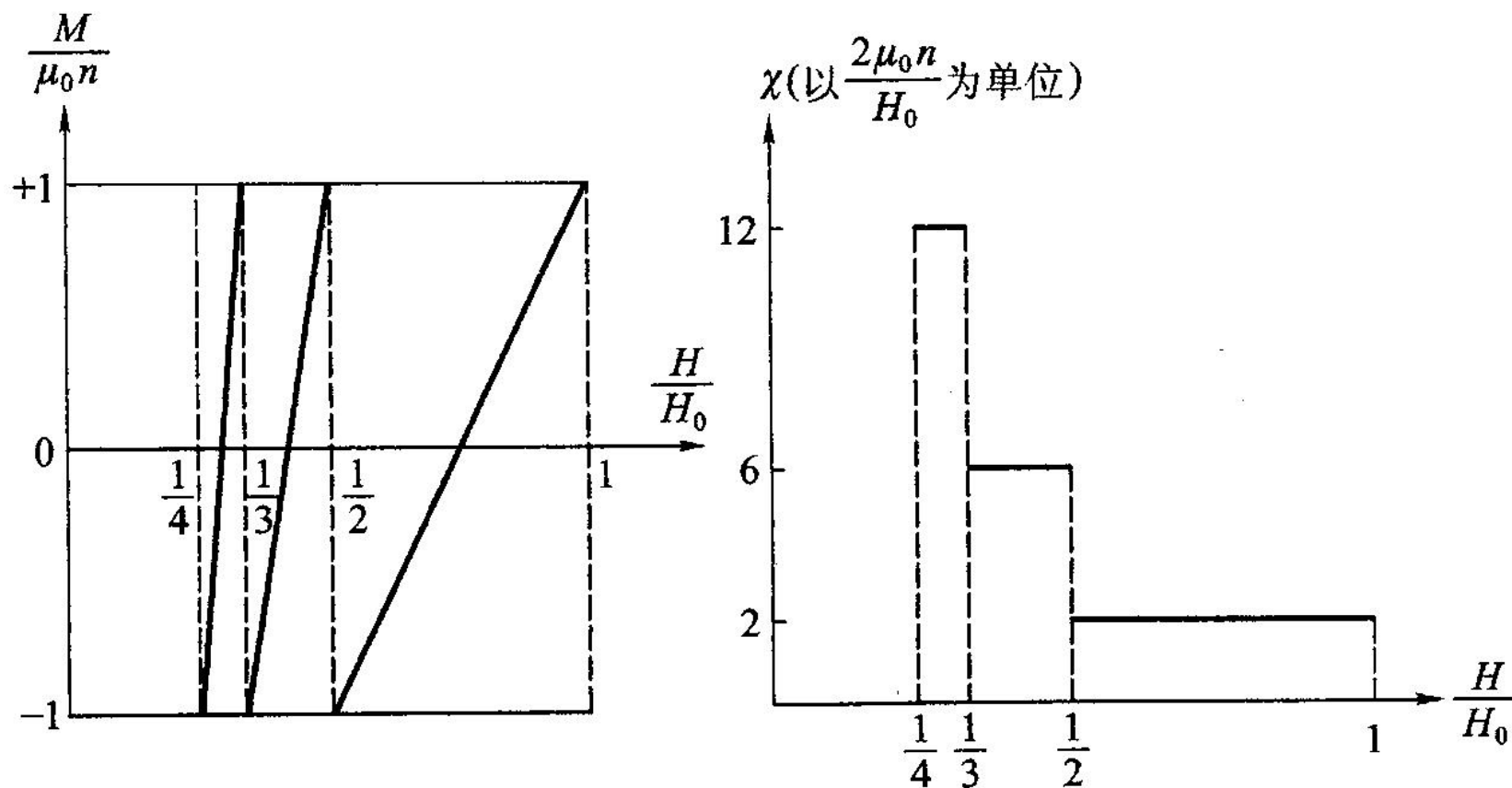


图 5.3.2 de Haas-Van Alphen 效应, 磁化强度与磁化率随  $H$  的变化图



## 泡利顺磁性

为了研究顺磁性，式(10.34)中取外磁场作用的第一项，得到哈密顿量

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} - \mu_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} = \frac{p^2}{2m} - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (10.65)$$

单电子能量为

$$\varepsilon_{\mathbf{p}, \pm 1} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \mp \mu_0 H \quad (10.66)$$

其中  $\varepsilon_{\mathbf{p}, +1}$  是电子的  $\boldsymbol{\mu}$  与  $H$  平行时的能量， $\varepsilon_{\mathbf{p}, -1}$  是反平行时的能量。系统的能量本征值用单粒子能量表示为

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{\mathbf{p}} (\varepsilon_{\mathbf{p}, +1} n_{\mathbf{p}, +1} + \varepsilon_{\mathbf{p}, -1} n_{\mathbf{p}, -1}) \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \left( \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu_0 H \right) n_{\mathbf{p}, +1} + \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu_0 H \right) n_{\mathbf{p}, -1} \right) \end{aligned} \quad (10.67)$$

其中  $n_{\mathbf{p}, \pm 1} = 0, 1$ ， $\sum_{\mathbf{p}} (n_{\mathbf{p}, +1} + n_{\mathbf{p}, -1}) = N$ 。引入符号

$$\begin{cases} n_{\mathbf{p}}^+ \equiv n_{\mathbf{p}, +1} & N_+ \equiv \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}, +1} \\ n_{\mathbf{p}}^- \equiv n_{\mathbf{p}, -1} & N_- \equiv \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}, -1} = N - N_+ \end{cases} \quad (10.68)$$

能量本征值式(10.67)表示为

$$E_n = \sum_{\mathbf{p}} (n_{\mathbf{p}}^+ + n_{\mathbf{p}}^-) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu_0 H (N_+ - N_-) \quad (10.69)$$



正则系综的配分函数为

$$\begin{aligned}
 Z_N &= \sum_{\substack{\{n_p^+\}, \{n_p^-\} \\ N_+ + N_- = N}} \exp \left( -\beta \sum_p (n_p^+ + n_p^-) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \beta \mu_0 H (N_+ - N_-) \right) \\
 &= \sum_{N_+=0}^N \exp(\beta \mu_0 H (2N_+ - N)) \sum_{\substack{\{n_p^+\} \\ \sum_p n_{p,+1} = N_+}} \exp \left( -\beta \sum_p \frac{\mathbf{p}^2}{2m} n_p^+ \right) \sum_{\substack{\{n_p^-\} \\ \sum_p n_{p,-1} = N_-}} \exp \left( -\beta \sum_p \frac{\mathbf{p}^2}{2m} n_p^- \right) \quad (10.70)
 \end{aligned}$$

相应的无自旋理想费米气体的配分函数为

$$Z_N^{(0)} = \sum_{\sum_p n_p = N} \exp \left( -\beta \sum_p \frac{\mathbf{p}^2}{2m} n_p \right) = \exp(-\beta F^{(0)}(N)) \quad (10.71)$$

其中  $F(N)$  是无自旋理想费米气体的自由能。用式(10.71)可以把式(10.70)改写为

$$\ln Z_N = -\beta \mu_0 H N + \ln \left( \sum_{N_+=0}^N \exp(2\beta \mu_0 H N_+ - \beta F^{(0)}(N_+) - \beta F^{(0)}(N_-)) \right) \quad (10.72)$$

因为在平衡态,  $N_+$  的取值必须使得系统自由能最小, 即

$$\left. \frac{\partial F(N_+)}{\partial N_+} \right|_{N, V, T} = -\frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial \ln Z_N}{\partial N_+} \right|_{N, V, T} = 0 \quad (10.73)$$



把式(10.72)代入式(10.73), 得到

$$2\mu_0 H - \frac{\partial F^{(0)}(N_+)}{\partial N_+} + \frac{\partial F^{(0)}(N_-)}{\partial N_-} = 0$$

$$\Rightarrow 2\mu_0 H = \mu^{(0)}(N_+) - \mu^{(0)}(N - N_+)$$
(10.74)

其中  $\mu^0$  是理想费米气体的化学势 (注意不要和玻尔磁矩的符号  $\mu_0$  混淆)。该公式反映的是系统内部自旋向上和向下的粒子数达到统计平衡的条件。

引入无量纲参数  $r \equiv \frac{2N_+}{N} - 1$ , 则上式改写为

$$\mu^{(0)}\left(N\frac{1+r}{2}\right) - \mu^{(0)}\left(N\frac{1-r}{2}\right) = 2\mu_0 H$$
(10.75)

当磁场很弱时,  $r$  的值很小, 此时可以在  $r = 0$  附近作展开并保留至一次项, 从而得到

$$r \approx \frac{2\mu_0 H}{\left(\frac{\partial \mu^{(0)}(xN)}{\partial x}\right)_{x=1/2}}$$
(10.76)

因为磁化强度为

$$M = \mu_0 (N_+ - N_-)$$
(10.77)

所以弱场下的磁化率

$$\chi = \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{2\mu_0^2}{v \left(\frac{\partial \mu^{(0)}(xN)}{\partial x}\right)_{x=1/2}}$$
(10.78)



上一章已求得理想费米气体在有限低温下的化学势为

$$\mu^{(0)} \approx \varepsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} (\beta \varepsilon_F)^{-2} \right) \quad (10.79)$$

有限高温下的化学势为

$$\mu^{(0)} \approx \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{\lambda^3}{v} + 2^{-3/2} \left( \frac{\lambda^3}{v} \right)^2 \right) \quad (10.80)$$

利用以上二式对弱场下的磁化率分以下四种情况讨论：



(1) 当  $T \rightarrow 0 \text{ K}$  时, 由式(10.79)可知 (没有自旋简并度)

$$\mu^{(0)} \approx \varepsilon_{\text{F}}^{(0)} = \left( \frac{6\pi^2}{v} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \quad (10.81)$$

因此

$$\mu^{(0)}(xN) = \left( \frac{6\pi^2 xN}{V} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \quad (10.82)$$

代入式(10.78)可得

$$\left. \frac{\partial \mu^{(0)}(xN)}{\partial x} \right|_{x=1/2} = \frac{2^{4/3}}{3} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{v} \right)^{3/2} = \frac{4}{3} \varepsilon_{\text{F}} \quad (10.83)$$

其中  $\varepsilon_{\text{F}} = \left( \frac{3\pi^2}{v} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}$  是计入自旋简并度  $g = 2$  的费米能。因此可以得到  $T \rightarrow 0 \text{ K}$  时的磁化率

$$\chi_0 = \frac{3\mu_0^2}{2v\varepsilon_{\text{F}}} \quad (10.84)$$

是与温度无关的有限值, 说明理想费米气体即使在极低温下也不会出现磁饱和状态。

(2) 有限低温时, 把式(10.79)代入计算可得

$$\chi = \chi_0 \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} (\beta\varepsilon_{\text{F}})^{-2} \right) \quad (10.85)$$



(3) 当  $T \rightarrow \infty$  时, 由式(10.80)可知

$$\mu^{(0)}(xN) = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{\lambda^3 xN}{V} \right) \quad (10.86)$$

因此

$$\chi_{\infty} = \frac{2\mu_0^2}{v \frac{2}{\beta}} = \frac{\mu_0^2 \beta}{v} \quad (10.87)$$

温度趋于无穷时, 磁化率趋于 0。

(4) 有限高温时, 把式(10.80)代入计算得到

$$\chi = \chi_{\infty} \left( 1 - \frac{\lambda^3}{2^{5/2} v} \right) \quad (10.88)$$



# 整数量子霍尔效应

## 10.3.1. 经典霍尔效应

考虑一个金属薄膜，可以视为二维电子系统，电子只能在  $xy$  平面内运动。设沿  $x$  方向存在电流  $I_x$ ，沿  $z$  方向加一均匀外磁场会导致电子受洛伦兹力作用，电流发生偏转，形成沿  $y$  方向的电场。当电场与洛伦兹力达到平衡时，形成一个稳定的沿  $y$  方向电势差  $V_y$  和电场  $E_y$ （示意图见杨展如第 164 页图 5.4.1）。电场由下式决定：

$$\mathbf{f}_{\text{洛}} = e\mathbf{E}_y = \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (10.89)$$

其中  $\mathbf{v}$  是电子的平均速度。所以

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{vH}{c} \\ V_y &= E_y L \end{aligned} \quad (10.90)$$

其中  $L$  是薄膜宽度。沿  $x$  方向的电流密度为

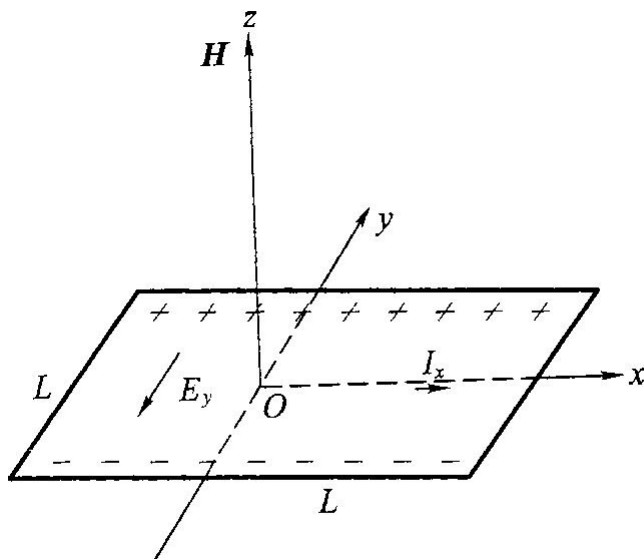
$$\mathbf{j}_x = nev_x = nev \quad (10.91)$$

电阻等于原有电阻率

$$R_x = \rho_{xx} \frac{L}{S} = \rho_{xx} \quad (10.92)$$

其中  $S = L$  是垂直于电流方向的“面积”，在二维情形下等于  $y$  方向的宽度  $L$ 。而霍尔电阻率为

$$\rho_{xy} \equiv \frac{V_y}{I_x} = \frac{E_y L}{j_x L} = \frac{H}{nec} \quad (10.93)$$





### 10.3.2. 整数量子霍尔效应

如前面所证明，对于电子能谱，略去  $z$  方向的运动，仅含  $xy$  方向运动的量子化能谱为

$$\varepsilon_j = \left( j + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (10.94)$$

$$g = \frac{eH}{hc} L^2$$

引入填充比（能级被电子占据的份额）：

$$\eta \equiv \frac{N}{g} = \frac{Nhc}{eHL^2} = \frac{hc}{veH}$$

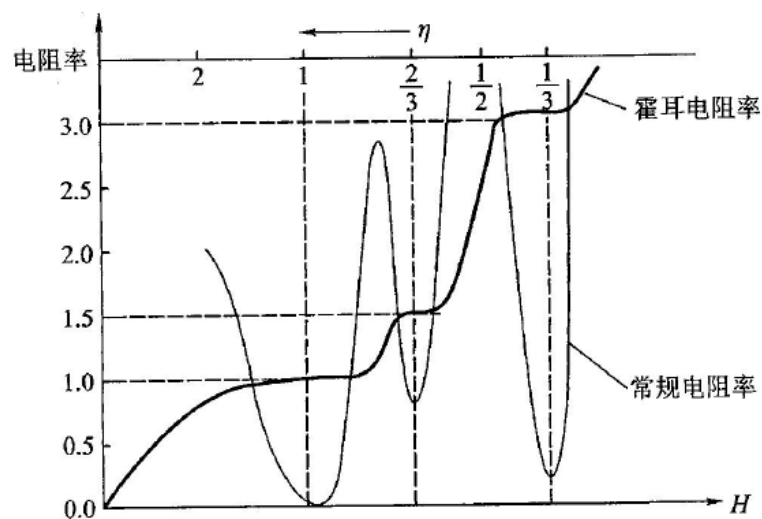
其中  $\nu = \frac{L^2}{N}$  是二维比容。代入式(10.93)可得

$$\rho_{xy} = \frac{h}{\eta e^2} \quad (10.97)$$

实验发现，霍尔电阻率  $\rho_{xy}$  在  $\eta = 1$ （整数值）和  $\eta = \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \dots$ （分数值）等处出现一平台，

与此同时，原有电阻率  $\rho_{xx}$  降得非常低，这些现象称为整数量子霍尔效应（对  $\eta = 1$ ）和分

数量子霍尔效应（对  $\eta = \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \dots$ ）（示意图见杨展如第 165 页图 5.4.2）。





整数量子霍尔效应可解释如下：当 $\eta = 1$ 时，最低朗道能级完全被电子填满，该能级就是费米能级。在费米能级以上存在能隙，低温下电子难以跃迁至低激发态，所有处在朗道能级中的电子如同自由电子一样运动。此时

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \quad (10.98)$$

与实验结果一致。由于这些电子不能跃迁到激发态，它们不受散射地移动，因此电阻几乎为零，电流 $I_x$ 保持稳定，几乎没有电压降。而平台的出现时因为系统中有杂质，使得（1）朗道能级变宽，成为朗道能带；（2）朗道能带之间由于局域杂质态的存在态密度不为零。（示意图见杨展如第 166 页图 5.4.3。）因此在很宽的外磁场 $H$ 范围内都能保持整数量子霍尔效应。

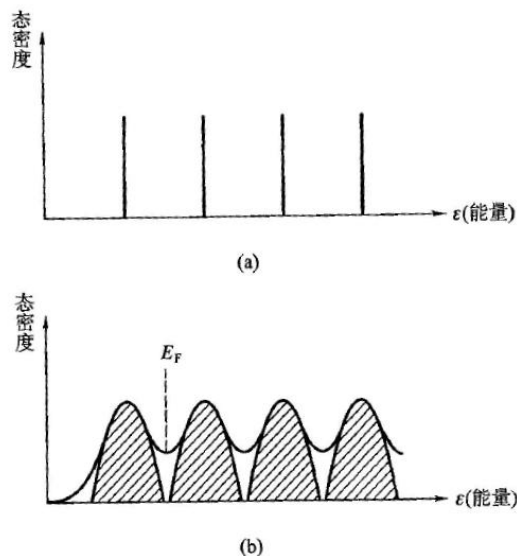


图 5.4.3 在外磁场中电子的态密度：(a)表示无杂质情况；  
(b)表示有杂质时朗道能级变宽(阴影)，局域电子态位于朗道能带之间的间隙内