

高等统计物理 作业一

- 1、 $\{|\phi_i\rangle, i=1,2,\dots\}$ 是一组完备正交归一基矢，证明 $\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = I$ ， I 是单位矩阵。
- 2、力学量 \hat{A} 对应的本征方程为 $\hat{A}|\phi_i\rangle = a_i|\phi_i\rangle$ ，证明对于任一各阶导数都存在的函数 f ，有 $f(\hat{A})|\phi_i\rangle = f(a_i)|\phi_i\rangle$ 。特别地，对于哈密顿量 \hat{H} ，有 $e^{-\beta\hat{H}}|\phi_i\rangle = e^{-\beta E_i}|\phi_i\rangle$ ，其中 E_i 是 $|\phi_i\rangle$ 对应的本征能量。
- 3、已知一维伊辛模型的配分函数 $Z = (2 \cosh K)^N + (2 \sinh K)^N$ ，求系统的内能、自由能、熵、压强和热容。
- 4、利用配分函数从统计物理出发推导出经典理想气体状态方程 $PV = NK_B T$ ，其中 P 是压强， V 是体积， N 是粒子数， T 是温度， k_B 是玻尔兹曼因子。
- 5、若随机变量 X 服从高斯分布 $\rho(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}(x - \langle X \rangle)^2\right)$ ，其中 $\langle X \rangle$ 是分布的中心， $\beta^{-1} = \langle (x - \langle X \rangle)^2 \rangle$ ，定义高斯生成函数

$$\langle \exp(iqX) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\beta}{2}(x - \langle X \rangle)^2\right) \exp(iqx) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\beta}{2}(x - \langle X \rangle)^2\right) dx}$$

证明 $\langle \exp(iqX) \rangle = \exp(iq\langle X \rangle - q^2/2\beta)$ 。

- 6、推导独立粒子系统的统计分布：玻色-爱因斯坦分布、费米-狄拉克分布、麦克斯韦-玻尔兹曼分布。

- 7、密度算符 $\hat{\rho} = \sum_i |\psi_i\rangle P_i \langle\psi_i|$ $\left(\sum_i P_i = 1\right)$ ，利用 $\langle \hat{A} \rangle = \text{tr}(A\hat{\rho})$ ，证明 (1) $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$ ；

$$(2) \text{tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1.$$

- 8、推导量子巨正则系综的统计算符表达式。

9、给定密度算符 $\hat{\rho} = |\psi_1\rangle P_1 \langle\psi_1| + |\psi_2\rangle P_2 \langle\psi_2|$ ，处于正交的两个态 $|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

的统计概率分别为 $1/4$ 和 $3/4$ 。求在由 $|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 构成的表象下 $\hat{\rho}$ 的密度矩阵。

10、利用 Jensen's inequality $f(\langle x \rangle) \leq \langle f(x) \rangle$ (要求 f 是凸函数) 由 Jarzynsk's equality

$\exp(-\beta\Delta F) = \langle \exp(-\beta W) \rangle$ 推导出满足热力学第二定律的不等式 $\langle W \rangle \geq \Delta F$ 。

11、证明对于巨正则系综下的理想量子气体，粒子数的相对涨落

$$\langle \Delta N^2 \rangle \equiv \frac{\langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2}{\langle \hat{N} \rangle^2} \sim \frac{1}{N}。$$

12、证明当体积 $V \rightarrow \infty$ 时，对动量的求和可以用积分代替 $\sum_{\{p_i\}} \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3 p$ 。

13、证明经典理想气体的正则配分函数可以写为 $Z_N(V, T) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N$ ，其中 N 是粒

子数， V 是体积， $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ ， m 是粒子质量， T 是温度。

14、证明对于巨正则系综，有 $s = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_P$ ， $v = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T$ ，其中 s 是比熵， μ 是化学势，

T 是温度， v 是比容， P 是压强。