# 高等统计物理 作业一

1、 证明经典理想气体的正则配分函数可以写为$Z_N^{\mathrm{id}}\left(V,T\right)=\dfrac{1}{N!}\left(\dfrac{V}{\lambda^3}\right)^N$，其中$N$是粒子数，$V$是体积，$\lambda=\sqrt{\dfrac{2\pi\hbar^2}{mk_{\mathrm{B}}T}}$，$m$是粒子质量，$T$是温度。

2、 已知系统配分函数为$Z$，推导得到其自由能、内能、熵、压强、化学势、热容的表达式。

3、 利用配分函数从统计物理出发推导出经典理想气体状态方程$PV=NK_{\mathrm{B}}T$，其中$P$是压强，$V$是体积，$N$是粒子数，$T$是温度，$k_{\mathrm{B}}$是玻尔兹曼因子。

4、 已知一维伊辛模型的配分函数$Z=\left(2\cosh K\right)^N+\left(2\sinh K\right)^N$，求系统的内能、自由能、熵、和热容。

5、 $\left\{\left|\phi_i\right\rangle, i=1,2,\cdots\right\}$是一组完备正交归一基矢，证明$\sum_i\left|\phi_i\right\rangle\left\langle\phi_i\right|=I$，$I$是单位矩阵。

6、 力学量$\hat{A}$对应的本征方程为$\hat{A}\left|\phi_i\right\rangle=a_i\left|\phi_i\right\rangle$，证明对于任一各阶导数都存在的函数$f$，有$f\left(\hat{A}\right)\left|\phi_i\right\rangle=f\left(a_i\right)\left|\phi_i\right\rangle$。特别地，对于哈密顿量$\hat{H}$，有$e^{-\beta\hat{H}}\left|\phi_i\right\rangle=e^{-\beta E_i}\left|\phi_i\right\rangle$，其中$E_i$是$\left|\phi_i\right\rangle$对应的本征能量。

7、 若随机变量$X$服从高斯分布$\rho\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{\beta}{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{\beta}{2}\left(x-\left\langle X\right\rangle\right)^2\right)$，其中$\left\langle X\right\rangle$是分布的中心，$\beta^{-1}=\left\langle\left(x-\left\langle X\right\rangle\right)^2\right\rangle$，定义高斯生成函数

$$\left\langle\exp\left(iqX\right)\right\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\beta}{2}\left(x-\left\langle X\right\rangle\right)^2\right)\exp\left(iqx\right)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\beta}{2}\left(x-\left\langle X\right\rangle\right)^2\right)\mathrm{d}x}$$

证明$\left\langle\exp\left(iqX\right)\right\rangle=\exp\left(iq\left\langle X\right\rangle-q^2/2\beta\right)$。

8、 推导独立粒子系统的统计分布：玻色-爱因斯坦分布、费米-狄拉克分布、麦克斯韦-玻尔

兹曼分布。

9、 密度算符 $\hat{\rho}=\sum_{i}|\psi_i\rangle P_i\langle\psi_i|\quad\left(\sum_{i}P_i=1\right)$，利用 $\langle\hat{A}\rangle=\mathrm{tr}(A\hat{\rho})$，证明（1）$\mathrm{tr}(\hat{\rho})=1$；（2）$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2)\le 1$。

10、 推导量子巨正则系综的统计算符表达式。

11、 给定密度算符 $\hat{\rho}=|\psi_1\rangle P_1\langle\psi_1|+|\psi_2\rangle P_2\langle\psi_2|$，处于正交的两个态 $|\psi_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},|\psi_2\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的统计概率分别为 1/4 和 3/4。求在由 $|\varphi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},|\varphi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 构成的表象下 $\hat{\rho}$ 的密度矩阵。

12、 利用 Jensen's inequality $f(\langle x\rangle)\le\langle f(x)\rangle$（要求 $f$ 是凸函数）由 Jarzynsk’s equality $\exp(-\beta\Delta F)=\langle\exp(-\beta W)\rangle$ 推导出满足热力学第二定律的不等式 $\langle W\rangle\ge\Delta F$。

13、 证明对于巨正则系综下的理想量子气体，粒子数的相对涨落 $\langle\Delta N^2\rangle\equiv\frac{\langle\hat{N}^2\rangle-\langle\hat{N}\rangle^2}{\langle\hat{N}\rangle^2}\sim\frac{1}{N}$。

14、 证明当体积 $V\to\infty$ 时，对动量的求和可以用积分代替 $\sum_{\{\mathbf{p}_i\}}\to\frac{V}{h^3}\int \mathrm{d}^3p$。

15、 证明对于巨正则系综，有 $s=-\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P,v=\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T$，其中 $s$ 是比熵，$\mu$ 是化学势，$T$ 是温度，$v$ 是比容，$P$ 是压强。