

高等统计物理 作业三

1. 求 $J > 0$ 且外磁场 $h \rightarrow 0^+$ 的条件下, 三角晶格上的二维伊辛模型的最低能量。
2. 证明伊辛模型的总磁化率 $X \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial h} \right)_T = \beta \left(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \right)$, 其中 M 是在外磁场 h 作用下的总磁化强度。
3. 证明 $m = \tanh(am)$ 在 $0 < a < 1$ 时没有非零解。
4. 证明对于任意实数, 有 $\exp(x) \geq 1 + x$ 。
5. 用变分原理计算证明伊辛模型的热力学微扰最优解为 $\mu_0 \Delta h = zJ \langle s_i \rangle_{\text{TP}}$ 。
6. 忽略梯度项并令外场为零, 求金兹伯—朗道模型在临界点处热容的跃变值。
7. 忽略梯度项并令外场为零, 求一级相变的金兹伯—朗道模型的相变温度 T_c 和过热温度 T_1 相对于过冷温度 T_c^0 的值和各温度区间段的极值点。
8. 用级数展开证明对任何满足 $X^2 = 1$ 的矩阵都有 $\exp(\theta X) = \cosh \theta + X \sinh \theta$, 其中 θ 是任意实数。
9. 证明二维伊辛模型对应的转移矩阵可以写为 $\mathbf{T} = \left(2 \sinh(2\beta J) \right)^{n/2} \mathbf{V}^{(1)} \mathbf{V}^{(2)}$, 其中各变量的定义见讲义。
10. 证明二维伊辛模型的解为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N(\beta) = \ln \left(2 \cosh(2\beta J) \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \ln \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} \right) \right), \text{ 其中}$$

$$\kappa \equiv \frac{\exp(2\beta J) - \exp(-2\beta J)}{(\exp(2\beta J) + \exp(-2\beta J))^2}.$$