平均场理论

- **分子平均场理论：**研究某个给定的分子，并且忽略涨落，把周围的分子对给定分子的作用看作是平均场。这一方法对于四维及以上的系统是正确的，在三维及以下远离临界点时符合得比较好。

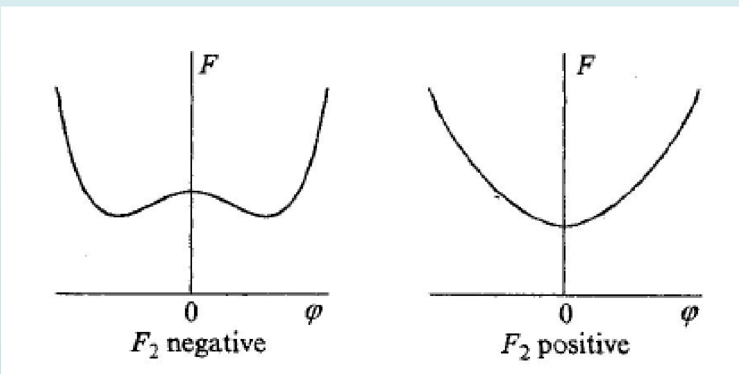
- **热力学微扰理论：**固定某个位点的哈密顿量，通过变分原理确定最优的扰动项。

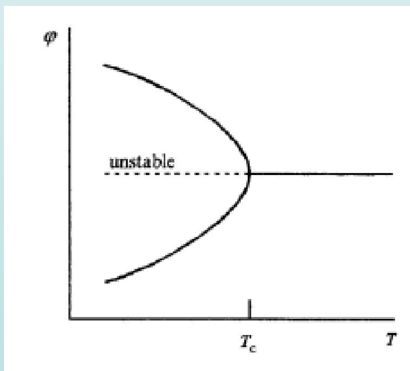
- **朗道自由能：**相对于给定的序参量形成的自由能曲面，其最小值对应的是（平均场意义下）热力学平衡态的自由能。

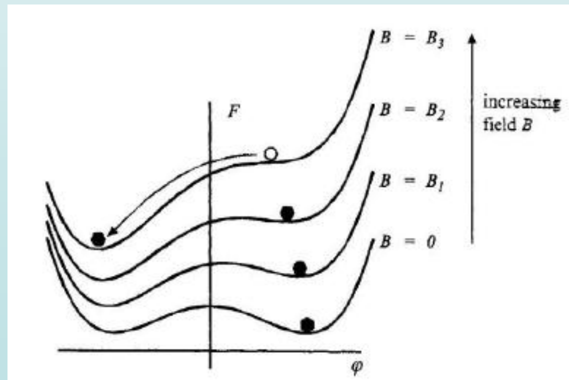
➢ 二级相变的金兹堡-朗道泛函

$$\mathscr{F}\left[m(\mathbf{x})\right]=\int \mathrm{d}^d x\left(a\left(T-T_{\mathrm{c}}\right)m^2(\mathbf{x})+\frac{b}{2}m^4(\mathbf{x})+c\left(\nabla m(\mathbf{x})\right)^2-hm(\mathbf{x})\right)$$

该泛函的设置出于以下考虑：（1）忽略$m(\mathbf{x})$在临界点附近的涨落；（2）$m(\mathbf{x})$的设置不改变原系统哈密顿量的对称性，因此泛函中除了 Zeeman 项外都是偶次幂；（3）梯度项的设置（$c>0$）确保磁化倾向于均匀分布；（4）$b>0$以保证更高阶项都是可忽略的小量；（5）$a>0$，当$T>T_{\mathrm{c}}$时，朗道自由能只有$m=0$一个极小值，而当$T<T_{\mathrm{c}}$时，有两个不为零的极小值（见下图）。







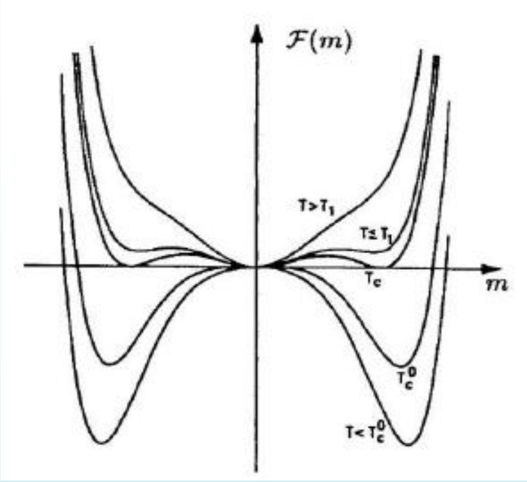
临界指数： $\alpha=0,\ \beta=\frac{1}{2},\ \gamma=1,\ \delta=3,\ \nu=\frac{1}{2},\ \eta=0$

➢ 一级相变的金兹堡-朗道泛函

$$\mathcal{F}\left[m(\mathbf{x})\right]=\int \mathrm{d}^d x\left(a\left(T-T_\mathrm{c}\right)m^2(\mathbf{x})+\frac{b}{2}m^4(\mathbf{x})+\frac{v}{2}m^6(\mathbf{x})+c\left(\nabla m(\mathbf{x})\right)^2\right)\qquad b<0$$

假设序参量在全空间均匀，则

$$\mathcal{F}(m)=C_0\left(a\left(T-T_\mathrm{c}^0\right)m^2+\frac{b}{2}m^4+\frac{v}{2}m^6\right)$$



当 $T>T_1$ 时，只有 $m=0$ 一个极小值点，系统完全无序；当 $T\le T_1$ 时，出现另外两个对称的亚稳态点；当 $T\le T_\mathrm{c}$ 时，这两个点比零点更稳定，零点变成亚稳态点；当 $T\le T_\mathrm{c}^0$ 时，零点不再是亚稳态点，系统有两个对称的最小值点。

- **金兹堡判据**

因为平均场理论忽略了系统的涨落，而涨落与关联成正比，趋近于临界点时占主导地位，因此平均场理论在临界点附近容易失效。

朗道平均场理论成立的条件为 $|t|^{(d-4)/2} << D$ 即 $d > 4$

$d < 4$ 时朗道平均场理论不适用

$d = 4$ 不十分适用，需要计入对涨落的修正

重 整 化 群

重整化群方法可以用来准确地求出临界指数和标度率。

- **卡丹诺夫变换**

在临界点附近，可以对系统进行粗粒化处理，即把一个大块中的位点在粗粒化层面平均成一个位点。因为特征长度趋于无穷，所以粗粒化后新的系统应该和原系统具有同样的性质。这一粗粒化的变换称为**卡丹诺夫变换**。

卡丹诺夫变换依然不能直接计算出临界指数，并且忽略了粗粒化层面出现的非近邻和多体相互作用。

➢ 重整化群

进行多次重整化变换后，临界面上的点将最终收敛到固定点，而不在临界面上的点将逐渐远离固定点。

（1）$|\lambda_i|>1$ 对应的变量 u_i 被称为**相关变量**（**relevant variable**），经过多次变换后会远离不动点，因此该变量在临界点必须趋于零。因为约化温度 $t=\dfrac{T-T_c}{T_c}$ 和磁场 h 在临界点趋于零且与临界行为相关，所以求解时必须有两个相关变量满足

$$u_1=at+O\left(t^2\right)\quad u_2=bh+O\left(h^2\right)\tag{11.30}$$

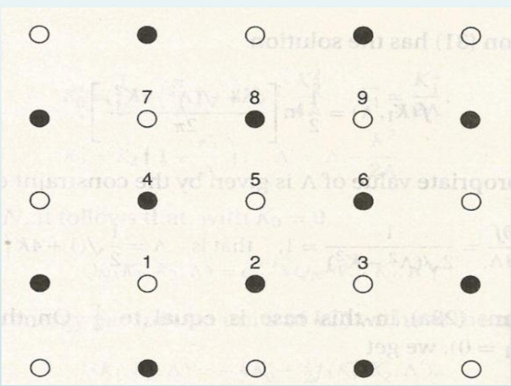
（2）$|\lambda_i|<1$ 对应的变量 u_i 被称为**无关变量**（**irrelevant variable**），当所有相关变量都为零时，对无关变量进行多次变换使得系统在临界面上向不动点靠近。

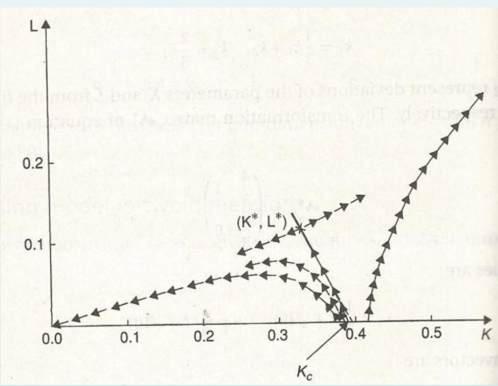
（3）$|\lambda_i|=1$ 对应的变量 u_i 被称为**边际变量**（**marginal variable**），在线性区域进行变换时保持不变。边际变量不明显影响系统的临界行为，但是会影响到幂律标度关系。

- 一维伊辛模型的重整化群解

$$\alpha=1 \quad \beta=0 \quad \gamma=1 \quad \nu=1 \quad \delta=\infty \quad \eta=1$$

- 无外场二维伊辛模型的重整化群近似解





为了用重整化群求得精确解，需要对以上步骤进行以下修正：

（1） 以上只考虑了 K 和 L，而忽略了 M 和更高阶关联，为了求得精确解，至少要把 M 项考虑进来；

（2） K 和 L 为小量的假设不准确，因此需要用数值方法进行线性化求解；

（3） 没有考虑自旋的重整化(11.14)。

➢ 普适性的解释

因为在临界面上的所有点在重整化群变换下都会趋近于不动点，所以如果两个系统的临界哈密顿量处在同一临界面上，则它们的临界行为都由同一个不动点决定。这样的两个系统就属于同一个普适类。

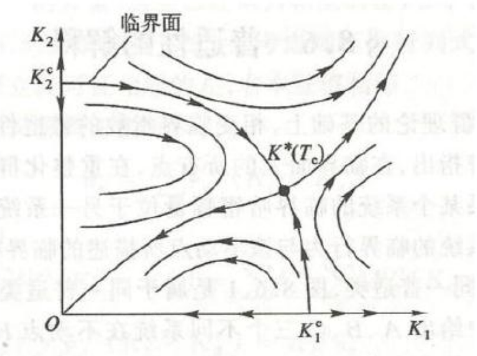


图 8.6.2　临界面(实际为临界线)上三个不同系统的临界行为都由不动点 K^* 决定

➢ 有限尺度标度

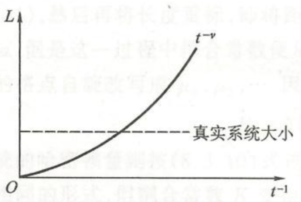


图 8.7.1　有限尺寸标度的交跨行为

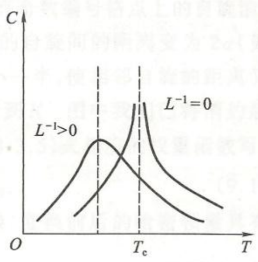


图 8.7.2　无穷大系统与有限系统的比热曲线

涨落-耗散定理

- **自发涨落的回归：**涨落的关联随时间衰减的现象。 $C(t) \to \langle \delta A(0) \rangle \langle \delta A(t) \rangle$

- **昂萨格回归假设：**宏观非平衡扰动的弛豫与平衡态微观自发涨落的回归遵从相同的规律。

$$\frac{\Delta \bar{A}(t)}{\Delta \bar{A}(0)} = \frac{C(t)}{C(0)}$$

- **涨落-耗散定理：** $\Delta \bar{A}(t) \equiv \bar{A}(t) - \langle A \rangle = \beta f \langle \delta A(0) \delta A(t) \rangle + O\left(f^2\right)$

- **线性响应条件：** $\Delta \bar{A}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \chi(t,t') f(t') + O\left(f^2\right)$

- **响应函数：** $\Delta \bar{A}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \chi(t,t') f(t') + O\left(f^2\right)$

- **线性响应理论：**

$$\chi(t) = \begin{cases} -\beta \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \delta A(0) \delta A(t) \rangle & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

随机过程

随机事件：在随机试验中，可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中具有某种规律性的事件。

随机过程：一连串随机事件动态关系的定量描述。

马可夫过程：当前事件的状态完全取决于上一步骤的状态，而与再早的状态无关。

查普曼—科尔摩格罗夫方程： $P_{1|1}(y_3,t_3\,|\,y_1,t_1)=\int P_{1|1}(y_2,t_2\,|\,y_1,t_1)P_{1|1}(y_3,t_3\,|\,y_2,t_2)\mathrm{d}y_2$

稳恒马可夫过程：对于稳恒的热力学系统，跃迁几率不依赖于时间节点，而只依赖于时间间隔。

马可夫链：（1）随机变量是一系列离散的态；（2）时间变量是整数；（3）跃迁几率只与时间间隔有关。

马可夫链：（1）随机变量是一系列离散的态；（2）时间变量是整数；（3）跃迁几率只与时间间隔有关。

主方程：某个态的几率变化等于从其它态跃迁到这个态的几率减去从这个态跃迁到其它态的几率。

福克—普朗克方程： $$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}A(y)P+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}B(y)P$$

朗之万方程： $$\frac{\partial v}{\partial t}=-\gamma v+f(t)$$