

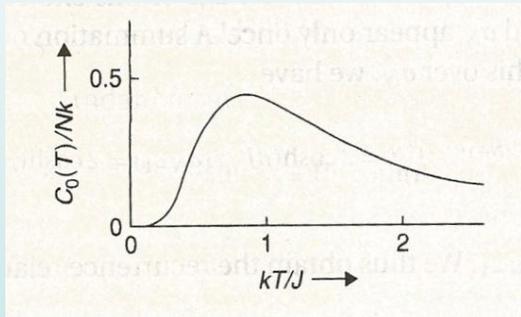


晶格统计模型

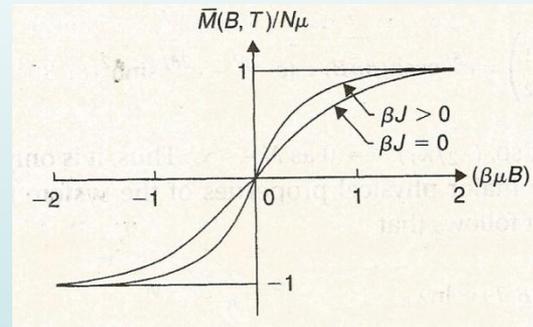
➤ 伊辛模型 (Ising Model)

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - \mu_0 h \sum_{i=1}^N s_i$$

一维伊辛模型的严格解: 转移矩阵法



热容



磁化强度

无外场二维伊辛模型: 昂萨格严格解, 热力学量, 临界指数



➤ 格气模型 (**Lattice Model**)
$$H - \mu N_a = - \sum_{i=1}^N \mu n_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N U_{ij} n_i n_j$$

如果只有临近粒子间有相互作用，且相互作用完全相同，则格气模型与伊辛模型等价。

➤ 外斯模型 (**Weiss Model**) 所有位点上的自旋相互作用的强度完全相同

$$H = -\frac{1}{2} J \sum_{i,j=1}^N s_i s_j - \mu_0 h \sum_{i=1}^N s_i$$

外斯模型的严格解就是分子平均场理论的结果

➤ 海森堡模型 (**Heissenberg Model**) 伊辛模型中自旋的方向可以任意

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - \mu_0 \sum_{i=1}^N \mathbf{h} \cdot \mathbf{s}_i$$



➤ **高斯模型 (Gaussian Model)** 自旋可以在 $-\infty, +\infty$ 之间连续取值，并且概率密度服从高斯分布。问题：温度低于临界点时配分函数发散。

➤ **球状模型 (Spherical Model)** 为了解决高斯模型发散的问题，加微正则约束条件

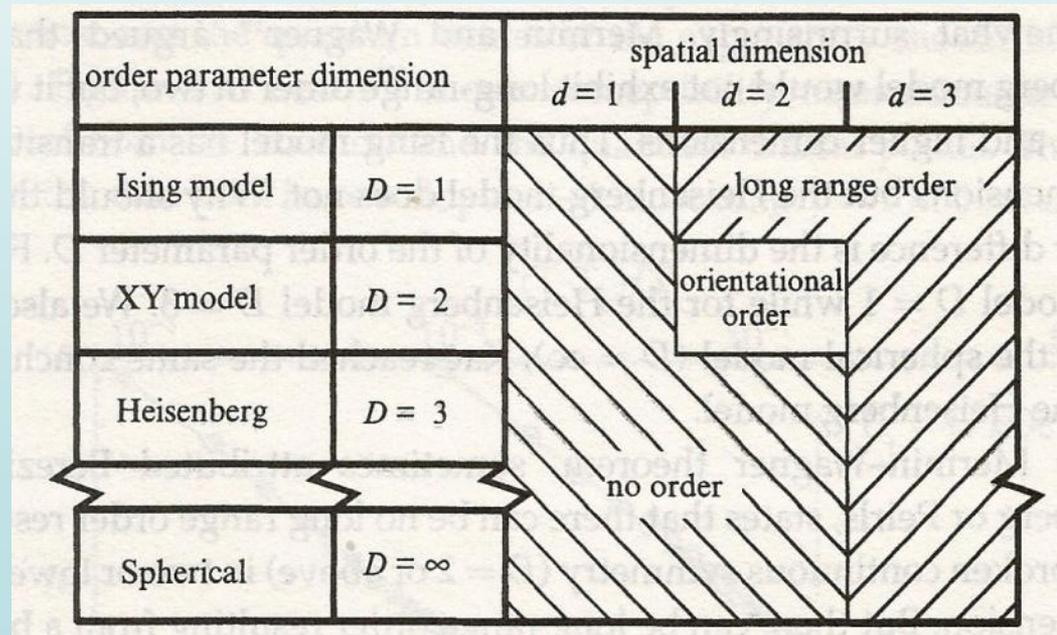
$$\sum_i s_i^2 = N$$

➤ **平均球状模型 (Mean Spherical Model)** 改为正则约束条件 $\left\langle \sum_i s_i^2 \right\rangle = N$

➤ **空间维数与相变**

(定性的理论解释可以参见杨展如 P234-236

§ 6.13 空间维数与涨落)





KT相变和渗流相变

- **XY 模型** 无外场的海森堡模型中，把单位自旋约束在二维空间中连续变化。

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos \theta_{ij}$$

二维连续XY模型的低温自旋波行为：具有准长程序的相

有拓扑缺陷的XY模型的涡旋态行为

当 $q = \pm 1$ （最小的绝对值）时，若 $T > \frac{\pi J}{2k_B}$ ，自由能为负，有利于自由单涡旋的存在；

而 $T < \frac{\pi J}{2k_B}$ 时自由能为正，不利于单涡旋的存在，系统处于自旋波态或者有绑定涡旋对的状态。

- **KT相变** 二维空间中破坏旋转对称性的相变。



➤ 渗流相变

考虑包含 N 个格点和 M 条边的晶格体系，且 $Z = \lim_{M, N \rightarrow \infty} M / N$ 是有限值，则该体系可

能出现两类渗流现象：

- (1) **键渗流**：设每条边有一定的概率 p 被占据，则不被占据的几率为 $1-p$ 。相互连通的键形成一个团簇。当团簇的尺寸趋于无穷大，即相距无穷远的任意两个格点都可以通过团簇中的键连接起来，这个团簇就称为**键渗流团簇**。
- (2) **格点渗流**：设每个格点有一定的概率 p 被占据，则不被占据的几率为 $1-p$ 。如果被占据的格点相邻则认为处在同一个团簇中。当一个团簇的尺寸趋于无穷时，就称为**格点渗流团簇**。

$$P(p) \sim (p - p_c)^\beta \quad p \rightarrow p_c^+$$



➤ Potts 模型

晶格一个位点上的自旋可以取 q 个值，且哈密顿量为

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{s_i, s_j} - \mu_0 h \sum_i \delta_{s_i, \alpha} \quad (9.23)$$

第一项表示当最临近格点的自旋取向相同时相互作用能为 $-J$ ，否则为 0。第二项表示当自旋取向与外磁场 h 的取向 α 相同时，附加能为 $-\mu_0 h$ ，否则为 0。

Potts 模型可以与渗流问题建立对应关系。